DNS-1
Corrigé

I La norme N

1. a) Par définition, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $0 \leq s_i(A) \leq N(A)$. Donc, si $N(A) = 0$ alors pour tout i, $s_i(A) = 0$ et donc puisque $s_i(A)$ est une somme nulle de nombres positifs, ces nombres sont tous nuls. Ce qui fait que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $|a_{i,j}| = 0$ et donc $A = 0$.

   b) On a directement $s_i(\lambda A) = |\lambda| s_i(A)$. Ce qui donne, en passant au maximum, $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.

   c) i) On a, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} s_i(A+B) &= \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + |b_{i,j}| \\ &\leq s_i(A) + s_i(B). \end{aligned}$$

   d) Donc, en utilisant la définition de N, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$s_i(A+B) \leq s_i(A) + s_i(B) \leq N(A) + N(B).$$

   i) Il ne reste alors qu'à prendre le maximum du membre de gauche pour avoir la formule demandée.

2. a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Calculons :

$$\begin{aligned} |y_i| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||x_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \|X\|_\infty \\ &\leq s_i(A) \|X\|_\infty \\ &\leq N(A) \|X\|_\infty \end{aligned}$$

   b) En Untilisant la définition (maximum...) de $\|\cdot\|_\infty$, on a bien la formule annoncée.

3. a) On a :

$$\begin{aligned}
s_i(AB) &= \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| s_k(B)
\end{aligned}$$

b) En utilisant la définition de N :

$$\begin{aligned}
s_i(AB) &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| s_k(B) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| N(B) \\
&\leq s_i(A) N(B)
\end{aligned}$$

c) En majorant, on a $s_i(AB) \leq N(A)N(B)$, puis en utilisant la définition, $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

4. a) On a, pour tout i, $s_i(I_n) = 1$ et donc $N(I_n) = 1$.
   b) On a $I_n = WW^{-1}$ et donc $N(I_n) \leq N(W)N(W^{-1})$...
   c) Par récurrence $N(V^m) \leq N(V)^m$.

5. a) On a $0 \leq N(U^m - 0) = N(U^m) \leq N(U)^m$. Comme $N(U) < 1$ et en utiisant le théorème des gendarmes $N(U^m - 0) \longrightarrow 0$ et donc $U^m \longrightarrow 0$.
   b) On a $0 \leq \left\| U^m T \right\|_\infty \leq N(U^m) \left\| T \right\|_\infty \leq N(U)^m \left\| T \right\|_\infty$. Donc de même qu'à la question précédente $\left\| U^m T - 0 \right\|_\infty \longrightarrow 0$ ce qui dit aussi $U^m T \longrightarrow 0$.

II Matrice à diagonale dominante

1. Si $MX = X$, alors $\left\| MX \right\|_\infty = \left\| X \right\|_\infty$. Donc, en utilisant I.2.b, $N(M) \left\| X \right\|_\infty \geq \left\| X \right\|_\infty$. Or, si $X \neq 0$, $N(M) \left\| X \right\|_\infty < \left\| X \right\|_\infty$ et donc on a bien $\left\| X \right\|_\infty < \left\| X \right\|_\infty$; ce qui est absurde.
   On a donc $MX = X \Rightarrow X = 0$. Ce qui permet de montrer que la matrice $M - I_n$ (ou la matrice $I_n - M$) est inversible.

2. Par construction $r_i(A) \geq 0$ et donc, si A est à diagonale dominante, $|a_{i,i}| > 0$ ce qui impose $a_{i,i} \neq 0$.

3. a) On a :

$$f_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{i,i}} a_{i,j} & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) On a donc

$$s_i(F) = \sum_{j=1}^{n} |f_{i,j}| = \sum_{j \neq i} \frac{1}{|a_{i,i}|} |a_{i,j}| = \frac{1}{|a_{i,i}|} r_i(A).$$

c) Par définition de « diagonale dominante » $s_i(F) < 1$. Comme on prend le maximum d'un nombre fini de réels strictement inférieurs à 1, on a bien $N(F) < 1$.
Comme $I_n + F = I_n - (-F)$ et que $N(-F) = N(F) < 1$, en utilisant de II.1, $I_n + F$ est inversible.
Or $A = D + E = D(I_n + F)$ et D est inversible, donc A l'est aussi.

III Méthode de Jacobi

1. a) Un premier calcul montre que $Y_{m+1} = -FY_m$, puis une récurrence fait le reste.

b) Comme $N(-F) = N(F) < 1$ (la matrice A est supposée à diagonale dominante) et en utilisant le I.5.b, $Y_m \longrightarrow 0$.

2. On a $c_i = b_i / a_{i,i}$ et si on note $T = FZ_m$ alors $t_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f_{i,j} z_j^{(m)} = \sum_{j \neq i} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} z_j^{(m)}$...

3. a) Voir le fichier `resolution-corr.py`

b) On parcourt n fois la boucle extérieure et à chaque fois on parcourt $n-1$ fois la boucle intérieure. On a donc parcouru $n^2 - n$ fois la boucle intérieure. La complexité est donc en $O(n^2)$.

4. On sait que $N(E^m) \leq N(E)^m$. Donc si $N(E)^m \leq \varepsilon$ alors $N(E^m) \leq \varepsilon$. On voit alors que si $m \geq \ln(\varepsilon)/\ln(N(E))$ (attention aux signes !) alors on a bien $N(E^m) \leq \varepsilon$.
La borne supérieure cherchée est $\ln(\varepsilon)/\ln(N(E))$.

a) On a donc une complexité en $O(\ln(\varepsilon) n^2)$...

5. a) Calculons :

$$\begin{aligned} R_{m+1} &= D(Z_{m+2} - Z_{m+1}) \\ &= D(-FZ_{m+1} + FZ_m) \\ &= -DF(Z_{m+1} - Z_m) \\ &= -DFD^{-1}R_m. \end{aligned}$$

b) Calcul... À faire par étapes : calculer $D^{-1}R_m$, puis $FD^{-1}R_m$ puis conclure.

c) Voir le fichier...

6. a) $N(E) = 1/2$.
   b) Voir le fichier...
   c) Pour chaque coefficient de Z_{m+1} on ne somme qu'au plus trois nombres et il y a n coefficients. La complexité est donc en $O(n)$.
   d) On a donc une complexité en $O(\ln(\varepsilon)n)$.