DNS-1
à rendre le 5 novembre 2018

On fixe un entier $n \geq 2$. Les matrices seront notées par une lettre majuscule et leurs coefficients par la minuscule correspondantes. On aura notamment affaire à la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et à la colonne $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de la norme ∞ définie par :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

On sait notamment qu'il existe un certain[1] $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty$ et que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $|x_j| \leq |x_{i_0}| = \|X\|_\infty$.
Un fichier Python (`resolution.py`) est à télécharger et à modifier. Me le renvoyer en ajoutant votre nom ainsi, si c'était moi je renverrai : `resolution-stengel.py`

I La norme N

Dans tout le reste du problème, on pose :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ s_i(A) = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$
$$N(A) = \max_{1\leq i\leq n} s_i(A).$$

1. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $N(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.
   b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer $s_i(\lambda A)$ à l'aide de $s_i(A)$. En déduire $N(\lambda A)$ en fonction de λ et $N(A)$.
   c) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
      i) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i(A + B) \leq s_i(A) + s_i(B)$
      ii) Justifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_i(A + B) \leq N(A) + N(B)$.
      iii) En déduire que $N(A + B) \leq N(A) + N(B)$.

Nous venons donc de montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soient X et Y deux colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles $Y = AX$.
   a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $|y_i| \leq N(A)\|X\|_\infty$.
   b) En déduire que $\|Y\|_\infty \leq N(A)\|X\|_\infty$.
3. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre α. Donner une relation entre α et $N(A)$.
4. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

[1] Qui dépend de X.

a) Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $s_i(AB) \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| s_k(B)$

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $s_i(AB) \leq s_i(A)N(B)$.

c) En déduire que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

5. a) Déterminer $N(I_n)$.

b) Soit W une matrice inversible. Montrer que $N(W) \cdot N(W^{-1}) \geq 1$.

c) Soit V une matrice et m un entier. Majorer $N(V^m)$ à l'aide de $N(V)$ et m.

6. Soit U une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $N(U) < 1$ et T une colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que

a) $U^m \xrightarrow[m \longrightarrow +\infty]{} 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Que peut-on en déduire pour $u_{i,j}^{(m)}$ où on définit ce nombre comme étant le coefficient (i,j) de U^m

b) $U^m T \xrightarrow[m \longrightarrow +\infty]{} 0$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

II Matrice à diagonale dominante

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $N(M) < 1$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $MX = X$.

a) Montrer que si on suppose $X \neq 0$ alors $\|X\|_\infty < \|X\|_\infty$.

b) En déduire que $X = 0$, puis que $I_n - M$ est inversible.

À partir de maintenant on introduit :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \;\; r_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| = s_i(A) - |a_{i,i}|$$

On dit qu'une matrice est à diagonale dominante (en ligne) si et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > r_i(A)$. Par exemple les matrice M et N qui suivent sont à diagonale dominante :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{D}$$

Dans la suite de ce problème on suppose que A est à diagonale dominante.

2. Justifier que pour tout i, $a_{i,i}$ est non nul.

On note D la matrice diagonale construite à partir des coefficients diagonaux de A et $E = A - D$. On a donc :

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

La question précédente montre que D est inversible. On note alors $F = D^{-1}E$ de coefficient général $f_{i,j}$.

3. a) Déterminer $f_{i,j}$ en fonction de i, j et des coefficients de A.
   b) Montrer que $s_i(F) = \dfrac{1}{|a_{i,i}|} r_i(A)$.
   c) En déduire successivement que $N(F) < 1$, puis que $I + F$ est inversible, et enfin que A est inversible.
4. a) Soit λ une valeur propre de A. En observant la matrice $B = A - \lambda I_n$, montrer qu'il existe i_0 tel que $|\lambda - a_{i_0,i_0}| \leq r_{i_0}(A)$.
   b) On considère la matrice N définie dans l'équation (D). Rappeler pourquoi N est diagonalisable. Déduire de la question précédente un encadrement pour les valeurs propres de N.

III Méthode de Jacobi

Soit B une colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On cherche à résoudre $AX = B$ autrement qu'avec la méthode du pivot.
Une étude rapide montre :

- que l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ sur système à n inconnues et n équations est de complexité $O(n)$ en opérations élémentaires (additions, multiplications) ;
- que pour trouver un pivot il faut faire n opérations sur les lignes, donc $O(n^2)$ opérations élémentaires ;
- que pour résoudre le système, il faut trouver n pivots ce qui fait en tout $O(n^3)$ opérations élémentaires.

Pour des « grosses[2] » matrices cette complexité peut être d'un cout prohibitif. Le but de cette partie est de proposer une méthode pour chercher une solution approchée avec une erreur absolue ε qui sera d'une complexité « seulement » en $O(n^2 \log(\varepsilon))$ pour une matrice à diagonale dominante A quelconque.
On utilise la décomposition $A = D + E$ pour transformer le système $AX = B$ en :

$$AX = B \iff DX = -EX + B \iff X = -D^{-1}EX + D^{-1}B$$

On note comme avant $F = D^{-1}E$ et on note en plus C la colonne définie par $C = D^{-1}B$.
On a donc

$$AX = B \iff X = -FX + C$$

Introduisons la suite $\big(Z_n\big)$ de colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par :

$$Z_0 = 0$$
$$\forall m \in \mathbb{N},\ Z_{m+1} = -FZ_m + C$$

1. On note Y_n la colonne définie par $Y_n = Z_n - \widetilde{X}$ où $\widetilde{X}$ est la solution de $AX = B$.

[2] Une recherche rapide sur internet parle de matrices de taille 50 000 et plus pour de la modélisation en chimie quantique.

a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $Y_{m+1} = (-F)^m Y_0$.

b) En déduire que $Y_m \xrightarrow[m \longrightarrow +\infty]{} 0$. Que peut-on alors dire de la suite $\big(Z_n\big)$?

2. On note $z_i^{(m)}$ le coefficient général de Z_m. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$z_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} z_j^{(m)} \right) \tag{E_m}$$

3. a) Compléter la fonction `iterer` qui calcule Z_{m+1} à partir de Z_m, A et B.

b) Quelle est la complexité d'`iterer` en fonction de la taille n de A ?

4. On convient de l'arrêter d'itérer dès que $N(E^m) \leq \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est une constante fixée.

a) Donner une borne supérieure au nombre d'itérations.

b) Quelle sera alors la complexité du programme en fonction de la taille n de A ?

5. On note R_m le vecteur résidu. Il est défini par $R_m = D(Z_{m+1} - Z_m)$, ou encore $Z_{m+1} = D^{-1} R_m + Z_m$.

a) Montrer que $R_{m+1} = -DFD^{-1} R_m$

b) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$r_i^{(m+1)} = -a_{i,i} \sum_{j \neq i} \frac{a_{i,j}}{a_{j,j}} r_j^{(m)} \tag{E_R}$$

c) Compléter la fonction `residu` pour qu'elle calcule le nouveau résidu, R_{m+1}, à partir de l'ancien, à savoir R_m.

On s'intéresse au cas où A est creuse, c'est à dire que peu de ses coefficients sont non nuls. Un exemple est la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 4 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{E_A}$$

Qui ne comporte que $3n - 2$ coefficients non nuls sur les n^2.

6. a) que vaut $N(E)$?

b) Compléter la fonction `itererCreux` pour qu'elle calcule Z_{m+1} à partir de Z_m et B, sachant que la matrice A est celle de l'équation (E_A). Notamment, le calcul de la somme de l'équation (E_m) ne comportera qu'au maximum deux termes. On pourra s'inspirer de la fonction `parA` qui calcule le produit AX.

c) Quelle est la complexité d'`itererCreux` en fonction de la taille n de la matrice ?

d) Avec les mêmes hypothèses qu'à la question 4, quelle est la complexité du programme en fonction de la taille n de A ?