DNS-2 — Corrigé

I D'après escp 2004

1. Ceci est un aperçu du cours à venir !
   a) Rappel : on définit G_x par :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X = n)$$

   On sait que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge : elle calcule $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X = n)\Big)$. La fonction G_X est donc définie en 1. Comme il s'agit d'une somme de série entière, elle est alors aussi définie sur $]-1, 1[$. De plus la série calculant $G_X(-1)$ converge absolument, donc G_X est définie en -1.
   On vient donc de montrer que G_X est définie sur $[-1, 1]$, donc sur $[0, 1]$.
   b) Comme l'énoncé indique $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a :

$$G_X(1) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X = n)\Big) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{N}) = 1.$$

   c) Puisque la série définissant G_X converge en 1, on a $R_X \geq 1$.
2. Ici on veut *montrer* que X a une espérance et la comparer à $G'_X(1)$.
   a) On sait que pour tout $n \geq 1$ et tout $x \neq 1$:

$$1 + x + \cdots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^{(n-1)+1} - 1}{x - 1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

   On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0, 1[,\quad \frac{G_X(x) - G_X(1)}{x - 1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^n - 1}{x - 1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad (x^0 = 1) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big)
\end{aligned}$$

   b) La fonction $x \longmapsto \dfrac{G_X(x) - G_X(1)}{x - 1}$ est une somme de fonctions croissantes[1] : elle est donc croissante.

[1] Car, pour tout $n \geq 1$ on a $a_n \geq 0$.

Cette fonction croissante sur $[0,1[$ a une limite en 1^- et est toujours inférieure à cette limite :

$$\forall x \in [0,1[,\ \frac{G_X(x)-G_X(1)}{x-1} \leq \lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ x<1}} \frac{G_X(x)-G_X(1)}{x-1} = G'_X(1).$$

c) Tronquons la somme du a). Pour tout $x \in [0,1[$ et tout $N \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} a_n\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leq G'_X(1)$$

Donc, en ôtant une des inégalités :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} a_n\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leq G'_X(1)$$

En faisant tendre x vers 1^-, on obtient l'inégalité annoncée.
Comme la série $\sum_{n\geq 1} na_n$ est à termes positifs et que ses sommes partielles sont majorées, cette série converge. De plus $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq G'_X(1)$.

d) Nous avons déjà la seconde inégalité. Pour l'autre :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [0,1[,\ 0 \leq a_n\Big(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\Big) \leq na_n$$

Donc, en sommant, on trouve bien :

$$0 \leq \frac{G_X(x)-G_X(1)}{x-1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n$$

e) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, X a une espérance si et seulement si $\sum_{n\geq 1} na_n$ converge (absolument) et, dans le cas de la convergence $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n$.
Le c) montre donc que X a une espérance.
En faisant tendre $x \longrightarrow 1^-$ dans la formule trouvée au d), on obtient :

$$G'_X(1) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \leq G'_X(1)$$

Donc $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

3. Ici, nous ne sommes plus dans le cadre de la question 2. On ne fait que supposer que $\mathbb{E}(X)$ existe, pour en *déduire* que G_X est dérivable en 1 et en suite que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

a) Pour $n \geq 1$ et tout $x \in [0,1]$, on a $|u_n'(x)| = |na_n x^{n-1}| \leq na_n$, donc :

$$\|u_n'\|_{\infty,[0,1]} \leq na_n.$$

Comme X a une espérance, $\sum\limits_{n\geq 1} na_n$ converge et donc par comparaison $\sum\limits_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[0,1]$.

b) Nous avons :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$;
- la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$ (cf 1.) ;
- la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $[0,1]$.

En utilisant le théorème ad hoc, $G_X = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et on a :

$$G_X' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'$$

En se plaçant en 1, on a :

$$G_X'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n = \mathbb{E}(X).$$

II D'après Ecricome 2006

Partie A

1. a) On a clairement :

$$\begin{aligned}(L_1 = n) &= \text{“}\underbrace{P\cdots P}_{n \text{ fois}} F\text{”} \cup \text{“}\underbrace{F\cdots F}_{n \text{ fois}} P\text{”}\\ &= (P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}).\end{aligned}$$

b) Les événements $P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1}$ étant incompatibles on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_1 = n) &= \mathbb{P}(P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1}) + \mathbb{P}(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})\\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(P_i) \times \mathbb{P}(F_{n+1}) + \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(F_i) \times \mathbb{P}(P_{n+1}) \quad \text{(indépendance des } P_i\text{)}\\ &= p^n(1-p) + (1-p)^n p.\end{aligned}$$

c) En se souvenant que si $|x| < 1$ alors $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = n) &= q\sum_{n=1}^{+\infty} p^n + p\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\ &= q\frac{p}{1-p} + p\frac{q}{1-q} \\ &= p+q \\ &= 1\end{aligned}$$

d) On a, pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}G_1(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = n)t^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (p^n q + q^n p)t^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} q(pt)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} p(qt)^n \\ &= \frac{qpt}{1-pt} + \frac{pqt}{1-qt}.\end{aligned}$$

e) Utilisons le I. G_1 est dérivable sur $[0,1]$. Donc L_1 a une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_1) &= G_1'(1) \\ &= \frac{qp}{(1-p)^2} + \frac{pq}{(1-q)^2} \\ &= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.\end{aligned}$$

Il reste à étudier $\varphi : p \longmapsto \mathbb{E}(L_1) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$. On a :

$$\varphi'(p) = \frac{1}{(1-p)^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{2p-1}{p^2(1-p)^2}.$$

La fonction φ atteint don un minimum quand $p = 1/2$ qui vaut $\varphi(1/2) = 2$. C'est à dire que L_1 a une espérance minimale quand $p = 1/2$ et que ce minimum vaut 2.

2. a) On a tout aussi simplement :

$$\begin{aligned}(L_1 = n) \cap (L_2 = k) = (&P_1 \cap \cdots \cap P_n \cap F_{n+1} \cap \cdots \cap F_{n+k} \cap P_{n+k+1}) \\ &\cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap \cdots \cap P_{n+k} \cap F_{n+k+1})\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\mathbb{P}\Big((L_1 = n) \cap (L_2 = k)\Big) = p^n q^k p + q^n p^k q = p^{n+1}q^k + q^{n+1}p^k$$

b) Les événements $\Big((L_1 = n)\Big)_{n\geq 1}$ forment un système complet d'événements et donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_2 = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\Big((L_1 = n) \cap (L_2 = k)\Big) \\
&= pq^k \sum_{n=1}^{+\infty} p^n + qp^k \sum_{n=1}^{+\infty} q^n \\
&= pq^k \frac{p}{1-p} + qp^k \frac{q}{1-q} \\
&= p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}
\end{aligned}$$

c) Pour tout $t \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}
G_2(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_2 = k) t^k \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}\Big) t^k \\
&= p^2 \sum_{\ell=0}^{+\infty} q^\ell t^{\ell+1} + q^2 t \sum_{\ell=0}^{+\infty} p^\ell t^\ell \\
&= \frac{p^2 t}{1-qt} + \frac{q^2 t}{1-pt}
\end{aligned}$$

d) Le rayon de convergence R_2 de cette série génératrice vérifie $R_2 \geq \min(1/p, 1/q)$ et donc $R_2 > 1$. La fonction G_2 est donc deux fois dérivable en 1 et donc L_2 a une espérance et une variance. Un calcul donne :

$$\begin{aligned}
G_2'(t) &= \frac{p^2}{1-qt} + \frac{p^2 qt}{(1-qt)^2} + \frac{q^2}{1-pt} + \frac{q^2 pt}{(1-pt)^2} \\
&= \frac{p^2}{(1-qt)^2} + \frac{q^2}{(1-pt)^2} \\
G_2''(t) &= \frac{2qp^2}{(1-qt)^3} + \frac{2qp^2}{(1-pt)^3}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(L_2) &= G_2'(1) \\
&= 1 + 1 \\
&= 2 \\
\mathbb{V}(L_2) &= G_2''(1) + G_2'(1) - G_2'(1)^2 \\
&= 2\frac{q}{p} + 2\frac{p}{q} + 2 - 2^2 \\
&= \frac{2}{pq} - 6
\end{aligned}$$

e) Il s'agit donc de comparer $\mathbb{P}\Big((L_1 = n) \cap (L_2 = k)\Big)$ et $\mathbb{P}(L_1 = n) \times \mathbb{P}(L_2 = k)$.
Supposons L_1 et L_2 indépendantes. On a donc, par exemple, $\mathbb{P}(L_1 = L_2 = 1) = \mathbb{P}(L_1 = 1) \times \mathbb{P}(L_2 = 1)$. On obtient l'équation : $pq = 2pq(p^2 + q^2)$, qui équivaut à $4p^2 - 4p + 1 = 0$, c'est à dire $p = 1/2$.
Réciproquement si $p = 1/2$ alors, après calculs, pour tous n, $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_1 = n) &= 1/2^n \\ \mathbb{P}(L_2 = k) &= 1/2^k \\ \mathbb{P}\Big((L_1 = n) \cap (L_2 = k)\Big) &= 1/2^{n+k}. \end{aligned}$$

et donc L_1 et L_2 sont indépendantes.

Partie B

1. a) On voit clairement que N_1 est constante égale à 1 et $\mathbb{E}(N_1) = 1$.

b) La variable N_2 ne peut prendre que deux valeurs 1 et 2. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_2 = 1) &= \mathbb{P}(\text{“}PP\text{”}) + \mathbb{P}(\text{“}FF\text{”}) \\ &= p^2 + q^2 \\ &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(N_2 = 2) &= \mathbb{P}(\text{“}PF\text{”}) + \mathbb{P}(\text{“}FP\text{”}) \\ &= 2pq \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(N_2) = \frac{3}{2}$$

c) On voit de même que $N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_3 = 1) &= \mathbb{P}(\text{“}PPP\text{”}) + \mathbb{P}(\text{“}FFF''\text{)} \\ &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(N_3 = 3) &= \mathbb{P}(\text{“}PFP\text{”}) + \mathbb{P}(\text{“}FPF\text{”}) \\ &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}(N_3 = 2) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}(N_3) = 2$$

2. On voit que $N_n(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$. Les probabilités des cas extrêmes étant :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n = 1) &= \mathbb{P}(\text{“}PP\cdots P\text{”}) + \mathbb{P}(\text{“}FF\cdots F\text{”})\\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\\ \mathbb{P}(N_n = n) &= \mathbb{P}(\text{“}PFPF\cdots\text{”}) + \mathbb{P}(\text{“}FPFP\cdots\text{”})\\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\end{aligned}$$

3. a) Une nouvelle série commence si $X[i] \neq X[i-1]$. On a alors, par exemple :

```
1  import random
2
3  m = int(input("Donnez la valeur de m : "))
4  X = [0]*(m+1)
5  N = [0]*(m+1)
6  X[1] = random.randrange(2)
7  N[1] = 1
8  for i in range(2,m+1):
9          X[i] = random.randrange(2)
10         if X[i]!=X[i-1]:
11                 N[i] = N[i-1]+1
12         else:
13                 N[i] = N[i-1]
14 print(N[1:])
```

b) Les lignes 4 et 5 initialisent X et L en leur affectant une liste de taille $m+1$ ne contenant que des 0. La ligne 14 quand à elle affiche les éléments d'indices 1 à m de la liste N : on affiche donc les valeurs prises par $N_1, \ldots, N_m$.

4. a) Pour qu'une nouvelle liste commence au n^{e} jet, il faut que les résultats du n^{e} et du $(n-1)^{\text{e}}$ jets soient différents. On a alors :

$$(N_n = k) \cap P_n = \Big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n\Big) \cup \Big((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n\Big)$$

De plus N_{n-1} ne s'intéresse qu'au résultat des jets 1 à $n-1$. L'événement $(N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}$ et l'événement P_n sont donc indépendants. D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1} \cap P_n\Big) &= \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}\Big((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}\Big)\\ \mathbb{P}\Big((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1} \cap P_n\Big) &= \mathbb{P}(P_n) \times \mathbb{P}\Big((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1}\Big)\end{aligned}$$

La formule demandée est donc claire : les événements P_{n-1} et F_{n-1} sont incompatibles.

Le système (P_n, F_n) est complet. En additionnant la formule trouvée et celle donnée par l'énoncé on a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_n = k) &= \mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) + \mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)\end{aligned}$$

b) Calculons :

$$\begin{aligned}
G_n(s) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_n = k)s^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_{n-1} = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)s^k \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_{n-1} = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbb{P}(N_{n-1} = \ell)s^{\ell+1} \qquad (\ell = k-1)
\end{aligned}$$

comme $\mathbb{N}_{n-1} \subset [\![1, n-1]\!]$, on a $\mathbb{P}(N_{n-1} = n) = \mathbb{P}(N_{n-1} = 0) = 0$ et donc :

$$\begin{aligned}
G_n(s) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(N_{n-1} = k)s^k + \frac{s}{2}\sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}(N_{n-1} = \ell)s^{\ell} \\
&= \frac{1}{2}G_{n-1}(s) + \frac{s}{2}G_{n-1}(s) \\
&= \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s)
\end{aligned}$$

Comme $N_1 = 1$, on a $G_1(s) = s$. La formule finale est alors évidente : elle donne le terme général d'une site géométrique de premier terme s et de raison $\dfrac{1+s}{2}$.

c) On a alors :

$$\mathbb{E}(N_n) = G'_n(1) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$