DNS-2
À rendre le 7/01/2019

L'exercice et le problème sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque...

I Exercice

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.
La fonction génératrice de X, notée G_X est la fonctoin définie par :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n$$

1. a) Justifier que G_X est définie sur le segment $[0, 1]$.
   b) Quelle est la valeur de $G_X(1)$?
   c) Que peut-on déduire pour le rayon de convergence R_X de G_X ?

Dans la suite on se place dans le cas $R_X = 1$.

2. Dans cette question, on suppose que G_X est dérivable en 1 ; elle vérifie donc :

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow 1 \\ x<1}} \frac{G_X(x) - G_X(1)}{x - 1} = G'_X(1).$$

   a) Établir pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$ l'égalité :

$$\frac{G_X(x) - G_X(1)}{x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \sum_{k=0}^{n-1} x^k \Big)$$

   b) En déduire que la fonction $x \longmapsto \dfrac{G_X(x) - G_X(1)}{x - 1}$ est croissante sur $[0, 1[$ et qu'elle vérifie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0, 1[$ les inégalités suivantes :

$$0 \leq \frac{G_X(x) - G_X(1)}{x - 1} \leq G'_X(1).$$

   c) Montrer que, pour tout entier naturel N non nul, on a : $0 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{N} n a_n \leq G'_X(1)$.
   En déduire que la série de terme général $n a_n$ $(n \geq 1)$ est convergente.
   d) À l'aide des résultats des questions a) et c), justifier pour tout nombre réel de l'intervalle $[0, 1[$, les inégalités suivantes :

$$0 \leq \frac{G_X(x) - G_X(1)}{x - 1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \leq G'_X(1).$$

e) Montrer que X a une espérance et que $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

3. (Que pour les 5/2) Dans cette question, on suppose que X a une espérance et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n(x) = a_n x^n$. Les fonctions u_n sont clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, 1]$.
   a) Montrer que la série $\sum u'_n$ converge normalement sur le segment $[0, 1]$.
   b) En déduire que G'_X est dérivable sur le segment $[0, 1]$ et que $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

II Problème

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.
On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)^{\text{e}}$ l'autre côté.
De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté.
On définit de même les séries suivantes.
Ω désigne l'ensemble des successions infinies de Pile ou Face.
Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement « le i^{e} lancer amène Pile » et F_i l'événement contraire. Les trois parties sont indépendantes.

Partie A Étude des longueurs de séries.

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   a) Exprimer l'événement $(L_1 = n)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + 1$.
   b) En déduire que
   $$\mathbb{P}(L_1 = n) = p^n q + q^n p$$
   c) Vérifier que :
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_1 = n) = 1$$
   d) Déterminer la fonction génératrice G_1 de L_1.
   e) En déduire que L_1 a une espérance, la calculer et montrer que cette espérance est minimale pour une valeur de p qu'on calculera.

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série.
   a) Exprimer l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $n + k + 1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = n) \cap (L_2 = k)$.
   b) En déduire que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\mathbb{P}(L_2 = k) = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}$$

On admet que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(L_2 = k) = 1$$

c) Déterminer la fonction génératrice G_2 de L_2

d) Déterminer l'espérance et la variance de L_2.

e) Montrer que L_1 et L_2 sont indépendantes si et seulement si p prend une valeur particulière.

Partie B Étude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \dfrac{1}{2}$.
On note N_n le nombre de séries **lors des n premiers lancers** :

- La première série est donc de longueur $k < n$ si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ième l'autre côté et de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce ;

- La dernière série se termine nécessairement au n-ième lancer.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP... (F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1; \quad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2;$$
$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3; \quad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4;$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que N_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.
2. Dans le cas général où $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $N_n(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par N_n) puis calculer les valeurs de $\mathbb{P}(N_n = 1)$ et $\mathbb{P}(N_n = n)$.
3. **Simulation informatique**.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque le k-ième lancer amène Pile et 0 sinon. Quand le module random est chargé, la fonction random.randrange(2) simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (soit une loi de Bernoulli de paramètre 1/2).
   a) Compléter le programme informatique suivant pour que, m étant une valeur entière entrée par l'utilisateur, il simule les m variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$ (dont les valeurs seront placées dans la liste `X`) et détermine les valeurs de $N_1, N_2, \ldots, N_m$ (qui seront stockées dans la liste `N`).

```
1 import random
2
3 m = int(input("Donnez la valeur de m : "))
4 X = [0]*(m+1)
5 N = [0]*(m+1)
6 X[1] = ...
7 N[1] = ...
8 for i in range(2,m+1):
9     X[i] = ...
10    ...
11    ...
12    ...
13    ...
14 print(N[1:])
```

b) Indiquer ce que font les lignes 4,5 et 14.

4. **Fonctions génératrices de** N_n. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0,1]$,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k$$

a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})$$

On admet que l'on obtiendrait de même

$$\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})$$

Montrer alors que

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)$$

b) Soit $n \geq 2$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$$

Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$$

c) Déterminer le nombre moyen[1] de séries dans les n premiers lancers.

[1] Il y a un abus de langage ici.