DS-1 — Corrigé

Remarque : dans ce devoir il y avait au moins 16 points (sur 33) qu'il fallait savoir faire[1] (ceux annotés **SF**, ⓒ, ⓐ)... Un candidat sérieux à l'intégration se doit d'aborder ces points et il/elle **doit** viser la note maximale sur ceux-ci...
Les annotations de ce corrigé signifient :

SF savoir faire ;

ⓒ question de cours (à peine déguisée) ;

ⓐ question notée atomiquement : soit tout est juste et il y a les points, soit aucun point n'est alloué...

Dans vos copies, vous trouverez les annotation suivantes :

Ⓒ voir le corrigé ;

Ⓡ rédaction problématique ;

Ⓔ voir/lire l'énoncé ou non conforme à l'énoncé.

Vous verrez aussi l'expression *non sequitur* (littéralement : qui ne suit pas). Elle est tilisée pour indiquer une déduction pas logique du tout[2]...

I [/10]

ⓐⓒ $[0,5]$ 1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramère $2 > 1$. Elle est donc convergente.

SF [0,5] 2. a) Classique : cos est strictement décroissante et dérivable/continue sur $[0, \pi/2]$. Elle induit donc une bijection[3] de $[0, \pi/2]$ sur $[0, 1]$. Comme $2/\pi \in [0, 1]$, l'équation $\cos(x) = 2/\pi$ a une unique solution.

SF [1] b) On étudie $f : t \in [0, \frac{\pi}{2}] \longmapsto \frac{\pi}{2}\sin(t) - t$.
La question précédente permet de dire que f' s'annule et change de signe une seule fois sur $[0, \pi/2]$. Donc, en faisant le tableau de variations de f, on voit que $f(t) \geq 0$ pour $t \in [0, \pi/2]$.

SF [1,5] c) Pour tout $t \in [0, \pi/2]$,

$$0 \leq t^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)$$

[1] Dans le futur il y en aura moins...
[2] Comme « mon cheval est blanc donc la mer est bleue ».
[3] On pouvait, bien sur, aussi directement utiliser arccos...

et donc

$$\begin{aligned} 0 \leq t^2\cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t) &= \frac{\pi^2}{4}(1-\cos^2(t))\cos^n(t) \\ &= \frac{\pi^2}{4}(\cos^{2n}(t) - cos^{2(n+1)}(t)). \end{aligned}$$

Donc, en intégrant,

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1}).$$

d) *Ultra-classique !* Après avoir vérifié que les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$, [1] **SF**

$$\begin{aligned} I_{p+1} &= \Big[\sin(t)\cos^{2p+1}(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t)\cdot(-(2p+1)\sin(t)\cos^{2p}(t))\,\mathrm{d}t \\ &= (2p+1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (2p+1)\int_0^{\pi/2} (1-\cos^2(t))\cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (2p+1)(I_p - I_{p+1}) \end{aligned}$$

On obtient donc la formule demandée...

e) L'inégalité du b. donne [1,5]

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2(p+1)}\cdot I_p.$$

On a clairement $I_p > 0$. En effet, on intègre une fonction continue, positive non identiquement nulle sur un intervalle non réduit à un point. On put alors diviser par I_p pour obtenir :

$$0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{8(p+1)}.$$

Le théorème des gendarmes permet alors de conclure.

3. *Convergence et limite de la suite* (S_n)

a) On effectue une intégration par parties en considérant $u(t) = t$, $v(t) = \cos^p(t)$. [0,5] Comme ces deux fonctions sont $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\begin{aligned} I_p &= \int_0^{\pi/2} 1\cdot\cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[t\cdot\cos^{2p}(t)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} t\cdot(-2p\sin(t)\cos^{2p-1}(t))\,\mathrm{d}t \\ &= 2p\int_0^{\pi/2} t\cdot\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

[1] b) On calcule alors

$$\begin{aligned}
\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} &= \frac{J_{p-1}}{\frac{2p}{2p-1} I_p} - \frac{J_p}{I_p} \\
&= \frac{1}{I_p}\left(\frac{2p-1}{2p} J_{p-1} - J_p\right) \\
&= \frac{1}{2p^2 I_p}\left(p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p\right) \\
&= \frac{1}{2p^2} \quad \textit{cqfd.}
\end{aligned}$$

[1] c) Toujours un calcul

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \\
&= 2\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p^2} \\
&= 2\sum_{p=1}^{n} \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} \\
&= 2\left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}\right)
\end{aligned}$$

[1,5] d) On a $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$. Donc, comme $\dfrac{J_n}{I_n}$ a une limite nulle, S_n a une limite quand n tend vers $+\infty$ et

$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - 2\frac{J_n}{I_n} \longrightarrow \frac{\pi^2}{6} = \zeta.$$

II Deuxième problème [/23]

Partie A [/4]

[1] 1. On effectue de changement de variables $t = u + k\pi$. Il n'est pas nécessaire d'en dire plus : l'intégrale n'est pas impropre ! On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u+k\pi)|}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\pi} \frac{|(-1)^k \sin(u)|}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u \quad (\sin u \geq 0 \text{ sur } [0,\pi])
\end{aligned}$$

2. On utilise la relation de Chasles suivie de la positivité de l'intégrale : [1,5]

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(u)}{\pi+k\pi}\,\mathrm{d}u \quad \text{(minoration du dénominateur)} \\ &= \int_{0}^{\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

3. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$ diverge (série harmonique), donc la suite $\displaystyle\left(\int_{\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t\right)_{n\geq 0}$ tend [1,5] vers l'infini. donc, par croissance il en est de même de la fonction $X \longmapsto \displaystyle\int_{\pi}^{X} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.
L'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ est donc divergente.

Partie B [/9]

1. a) Pour obtenir la formule demandée, on intègre par parties en considérant les fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ définies par : [1] **SF**

$$f(u) = -\cos(u), \quad g(u) = \frac{1}{u}.$$

Comme $\displaystyle\left|\frac{\cos(u)}{u^2}\right| \leq \frac{1}{u^2}$ et que $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, $t \longmapsto \dfrac{\cos(u)}{u^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ converge absolument. F a donc une limite en $+\infty$ qui vaut :

$$\alpha = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \lim_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = \cos(1) - \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

b) On sait que, pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et tous a, b de $\mathbb{R}_+^*$, les intégrales $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. [0,5] **SF**
Comme on l'a vu aux questions précédentes, les intégrales $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent. Donc les intégrales $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{x}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ convergent et, en appliquant Chasles on a bien :

$$\int_{x}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \alpha - F(x), \quad \int_{x}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \beta - G(x).$$

SF [1] 2. a) Faisons le changement de variables $u = t + x$. On obtient :

$$\int_0^T \frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+T} \frac{\sin(u-x)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Le résultat demandé s'obtient de la formule bien connue $\sin(u-x) = \sin(u)\cos(x) - \cos(u)\sin(x)$...

SF [1] b) D'après la question 1.c. les deux intégrales du second membre de l'équation obtenue au 2.a. ont une limite quand $T \longrightarrow +\infty$, donc l'intégrale du membre de gauche a aussi une limite lorsque $T \longrightarrow +\infty$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t$ converge et la formule demandée s'obtient en passant à la limite dans la formule obtenue à la question 2.a.

SF [1,5] 3. D'après les questions 1.c. et 2.b, on a, pour tout $x > 0$:

$$A(x) = \cos(x)(\alpha - F(x)) - \sin(x)(\beta - G(x))$$

Comme, par construction F et G sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, A l'est aussi. De plus

$$F'(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$
$$G'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
A'(x) &= -\sin(x)(\alpha - F(x)) - \cos(x)\cdot\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)(\beta - G(x)) + \sin(x)\cdot\frac{\cos(x)}{x}\\
&= -\sin(x)(\alpha - F(x)) - \cos(x)(\beta - G(x))\\
A''(x) &= -\cos(x)(\alpha - F(x)) + \sin(x)\cdot\frac{\sin(x)}{x} + \sin(x)(\beta - G(x)) + \cos(x)\cdot\frac{\cos(x)}{x}\\
&= -A(x) + \frac{1}{x}...
\end{aligned}$$

SF [1] 4. Comme F (resp. G) a pour limite α (resp. β) en $+\infty$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0$$

De plus, cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}_+^*$, donc A et A' tendent vers 0 en ∞.

SF [1] 5. a) Pour tout $u \in]0,1]$, $0 \leq \cos(u) \leq 1$. L'inégalité demandée provient alors de :

$$\int_x^1 0\,\mathrm{d}u \leq \int_x^1 \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \leq \int_x^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

[1] b) Calculons :

$$\begin{aligned}
\sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u &= \sin(x)\int_x^1 \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \sin(x)\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u\\
&= \sin(x)\int_x^1 \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \sin(x)\cdot\beta.
\end{aligned}$$

Or $\sin(x)\ln(x) \underset{0}{\sim} x\ln(x) \xrightarrow[x \longrightarrow 0^+]{} 0$, donc, par encadrement,

$$\sin(x)\int_x^1 \frac{\cos(u)}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[x \longrightarrow 0^+]{} 0$$

D'où la limite demandée.

c) Comme $\sin(u)/u$ a une limite en 0^+, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge. Or (1.a.) l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ converge. [1]
D'après la question précédente, $A(x)$ a une limite quand x tend vers 0^+ et

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Partie C [/6]

1. a) Deux méthodes sont possibles. [1] **SF**

- *Lapidaire.* On remarque que θ_k est continue sur $\mathbb{R}_+$ et a pour limite 0 en $+\infty$. De ce fait θ_k est bornée.[4]
- *Détaillée.* Si $k = 0$, $\theta_0(t) = e^{-xt}$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq \theta_0(t) \leq 1 = M_0$$

et donc θ_0 est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Si $k \geq 1$, la fonction θ_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \theta_k'(x) = (k - xt)t^{k-1}e^{-xt}.$$

Le tableau de variations de θ_k est donc :

t	0		k/x		$+\infty$
θ_k'		$+$		$-$	
θ_k	0	$\nearrow$	M_k	$\searrow$	0

où $M_k = \theta_k(k/x)$

Donc, quoi qu'il arrive θ_k est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc, pour tout $t \geq 0$,

$$0 \leq \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{M_k}{1+t^2}.$$

b) Comme la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, par comparaison par $\leq$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (absolument). [1]

[4] Ce type de raisonnement, bien que correct, peut poser problème à certains correcteurs. Tout dépendra alors de la qualité globale de votre copie.

SF [1] 2. a) L'énoncé dit que B_0 est $\mathcal{C}^\infty$ et $B_0'' = -B_1' = B_2$. On a donc :

$$\begin{aligned} B_0''(x) + B_0(x) &= B_2(x) + B_0(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

[1] b) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$0 \le \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \le e^{-xt}, \quad 0 \le \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \le te^{-xt}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x} \\ \int_0^{+\infty} te^{-xt}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x^2} \quad \text{(intégration par parties...)} \end{aligned}$$

Les inégalités demandées s'obtiennent alors en intégrant les inégalités ci-dessus et en se souvenant que $-B_0' = B_1$. On pouvait aussi écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= B_0(x) + B_0''(x) = B_0(x) + \underbrace{B_2(x)}_{\ge 0} \\ -\frac{1}{x^2} &= B_0'(x) + B_0'''(x) = -B_1(x) - \underbrace{B_3(x)}_{\ge 0} \end{aligned}$$

Par encadrement, les limites de B_0 et B_0' sont toutes deux 0.

[1,5] 3. a) Tout d'abord, pour tout $t \ge 0$,

$$\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \le \frac{1}{1+t^2}$$

D'où

$$B_0 \le \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

De même, puisqu'on intègre des fonctions positives :

$$B_0(x) \ge \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Et puisque $t \longmapsto e^{-xt}$ décroît sur $[0, 1/\sqrt{x}]$, on a, pour tout t de cet intervalle $e^{-xt} \ge e^{-\sqrt{x}}$. La minoration de $B_0(x)$ est alors claire.

[0,5] b) En appliquant le théorème d'encadrement, on voit que B_0 tend vers $\pi/2$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie D [/4]

1. Par construction U est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, [1] **SF**

$$U'(x) = 2\varphi'(x)\varphi(x) + 2\varphi''(x)\varphi'(x) = 2\varphi'(x) \cdot (\varphi''(x) + \varphi(x)).$$

Comme

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = A''(x) - B_0''(x) + A(x) - B_0(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

la fonction U est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Les fonctions A, A', B_0 et B_0' ont toutes une limite nulle en $+\infty$, donc : [1] **SF**

$$U \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

3. La fonction U est constante et de limite nulle en $+\infty$. Elle est donc nulle sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui permet de dire que pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $A(x) = B_0(x)$. [1] **SF**

4. Faisons tendre x vers 0. On a [1]

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \lim_{x \longrightarrow 0^+} A(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}.$$