

DS-1

22 septembre 2018

Durée 4h

I Premier problème

1. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Dorénavant on note (S_n) la suite de ses sommes partielles et ζ sa somme. C'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2}, \quad \zeta = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

On considère pour tout nombre entier $p \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t) dt, \quad J_p = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p}(t) dt.$$

2. *Convergence de la suite $(J_p/I_p)_{p \in \mathbb{N}}$.*

a) Justifier que l'équation

$$\cos(x) = \frac{2}{\pi}$$

a une unique solution dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t).$$

(On pourra étudier une fonction auxiliaire)

c) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4} (I_p - I_{p+1}).$$

d) Montrer, en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1} , que

$$I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p$$

(on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2p+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

e) Dédire des résultats précédents que J_p/I_p tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

3. *Calcul de ζ*

a) Justifier que :

$$I_p = p \int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^{p-1}(t) dt.$$

On admet qu'en poursuivant¹ les calculs on montre que

$$I_p = p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p$$

b) Montrer qu'il existe une constante α , qu'on déterminera, telle que :

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{\alpha}{p^2}.$$

c) Exprimer S_n à l'aide de la suite (J_p/I_p) et, éventuellement de la constante α .

d) Calculer I_0 et J_0 , puis déterminer ζ .

II Deuxième problème

Les quatre parties sont dans une large mesure indépendantes. Les résultats démontrés au cours des parties B et C peuvent être utilisés, si nécessaire, dans la partie D.

Partie A Une fonction qui n'est pas intégrable

1. Montrer que pour $k \geq 1$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u + k\pi} du$.

2. En déduire que

$$\int_\pi^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \frac{\sin u}{u + k\pi} du \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Indication : on utilisera le fait que $\int_0^\pi \sin(u) du = 2$ pour minorer une intégrale.

3. En déduire que $\int_\pi^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ diverge.

Partie B Étude de la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$

On note $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u} du \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u} du.$$

1. a) Montrer, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$: $F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2} du$.

En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

De manière analogue, on montre que G admet une limite finie en $+\infty$. On note β cette limite.

¹Pour vous, chez vous, faites-les !

b) En déduire que, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ convergent, et que : $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \alpha - F(x)$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \beta - G(x)$.

2. a) Montrer que, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ et tout réel $T \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u} du.$$

b) En déduire que, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

On note $A :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par :

$$A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt.$$

3. Montrer que l'application A est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}$$

4. Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. a) Montrer :

$$\forall x \in]0, 1], \quad 0 \leq \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \leq -\ln x.$$

b) En déduire que $\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ par valeurs strictement positives.

c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ lorsque x tend vers $+\infty$ par valeurs strictement positives.

Partie C Autour de la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

1. a) Montrer que, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ et tout entier naturel k , l'application θ_k définie par $\theta_k(t) = t^k e^{-xt}$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.

On note, pour tout entier naturel k , $B_k :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par : $B_k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, B_k est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $B'_k = -B_{k+1}$.

2. a) Montrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[$:

$$B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}$$

b) Montrer que, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$:

$$0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x} \text{ et } 0 \leq -B_0'(x) \leq \frac{1}{x^2}$$

et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B_0'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. a) Montrer :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

b) En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Partie D Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$

On considère l'application $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, par :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x),$$

où A a été définie dans la partie I et B_0 a été définie dans la partie II.

On pose $U :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, par :

$$U(x) = (\varphi(x))^2 + (\varphi'(x))^2.$$

1. Montrer que U est constante sur $]0, +\infty[$.
2. Quelle est la limite de U lorsque x tend vers $+\infty$?
3. En déduire que, pour tout réel $x \in]0, +\infty[$, $A(x) = B_0(x)$.
4. Quelle est la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.