

DS-2 — Corrigé

Partie A [/10]

SF [0,5] 1. a) On calcule $\det(B) = 0$ ou on remarque que les deux premières colonnes de B sont colinéaires.

SF [0,5] b) On calcule $\det(A) = -1 \neq 0$

SF [0,5] c) On calcule AC et on le compare à B .

SF [1] 2. a) On a :

$$\begin{aligned}\chi_{(A,B)}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 4\lambda - 2 & 2\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda + 1 \end{vmatrix} \\ &= (2\lambda - 1)(1 - 2\lambda) \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2\lambda - 1)^2.\end{aligned}$$

SF [0,5] b) Donc $\text{Sp}(A, B) = \{1/2\}$.

SF [1] c) Observons :

$$\frac{1}{2}B - A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 1. une base de son noyau est par exemple $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. De ce fait :

$$E_{1/2}(A, B) = \text{vect} \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} \dots$$

[1] 3. a) Un calcul donne : $\chi_{(B,A)}(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2)^2$ (on met en facteur λ dans la première ligne du déterminant et $\lambda - 2$ dans les deux autres).

b) Rappel : $E_\lambda(B, A) = \ker(\lambda A - B)$ et $E_\lambda(C) = \ker(\lambda I_n - C)$.

[1] i) Les matrices $0A - B$ et $0I_3 - C$ sont de rang 2 (les deux dernières colonnes indépendantes et la première égale au double de la deuxième. On a donc bien $E_0(B, A) = E_0(C) = \text{vect} \{\mathbf{u}_1\}$.

[1] ii) On a :

$$2A - B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2I_3 - C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -12 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont de rang 1 et (on l'a déjà vu au 2.c pour la matrice $2A - B$) leur noyau a pour base $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

SF [0,5] c) On a les bases des deux sous-espaces : la somme des dimensions est claire... Bonus : on vient de montrer que C est diagonalisable.

4. a) On a :

[0,5] SF

$$\det(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$. De plus, par construction (cf 3.b.) cette famille est formée de vecteurs propres de C .

On aurait pu dire : $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est une réunion de bases de sous-espace propres de C : elle est donc libre. Comme son cardinal est 3, c'est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour C .

b) On a vu au 3.b que C est diagonalisable et qu'une base de vecteurs propres de C est donnée par $\mathcal{F}$. En observant l'ordre des valeurs propres, on voit que :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

c) On a $B = AC = ARDR^{-1} \dots$

[0,5] SF

d) Posons $P = AR$ et $Q = R^{-1}$. Les matrices P et Q sont inversibles. En effet : A est le produit de deux matrices inversibles et B est l'inverse d'une matrice inversible. De plus

[1]

$$\begin{aligned} PI_3Q &= PQ = ARR^{-1} = A \\ PDQ &= ARDR^{-1} = B. \end{aligned}$$

Partie B [/13]

1. a) On a :

[1]

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(\lambda B - A) = \det(B(\lambda I - B^{-1}A)) = \det(B)\chi_{B^{-1}A}(\lambda)$$

La fonction $\chi_{(A,B)}$ est donc polynomiale de degré n .

b) Prenons pour A et B la même matrice N : une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle. Son déterminant est donc nul.

$$\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(\lambda N - N) = \det((\lambda - 1)N) = (\lambda - 1)^n \det(N) = 0.$$

2. a) On a deux sens :

($\Rightarrow$) Découle directement de la définition...

[0,5]

($\Leftarrow$) Comme λ est quelconque, on pose $\lambda = 0$ pour obtenir $A = PA'Q$, puis on simplifie et on pose $\lambda = 1$ pour avoir $B = PB'Q$. Attention le mot « identifier » est à proscrire ici...

[1]

b) On utilise la formule trouvée à la question précédente pour écrire :

[1]

$$\begin{aligned} \chi_{(A,B)}(\lambda) &= \det(\lambda B - A) \\ &= \det(P(\lambda A' - B')Q) \\ &= \det(P)\chi_{(A',B')}(\lambda)\det(Q) \end{aligned}$$

La constante α est donc $\alpha = \det(P)\det(Q)$ et elle est non nulle car P et Q sont inversibles.

Comme $\alpha \neq 0$, les polynômes $\chi_{(A,B)}$ et $\chi_{(A',B')}$ ont même racines, d'où l'égalité $\text{Sp}(A, B) = \text{Sp}(A', B')$.

[1] 3. a) Soit $\lambda \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}\chi_{(A,B)}(\lambda) &= \det(\lambda B - A) \\ &= \det\left(-\lambda\left(\frac{1}{\lambda}A - B\right)\right) \\ &= (-\lambda)^n \det\left(\frac{1}{\lambda}A - B\right) \\ &= (-\lambda)^n \chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}$$

[0,5] b) La fonction $\chi_{(A,B)}$ est polynomiale et non nulle. Il existe au moins un réel $\lambda \neq 0$ pour lequel $\chi_{(A,B)} \neq 0$ (sinon on aurait une infinité de racines...). D'après la question précédente $\chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \neq 0$, et donc (B, A) est régulier.

c) Par construction :

$$\chi_{(B,A)}(\lambda) = \lambda^r \underbrace{\sum_{k=0}^{s-r} a_{r+k} \lambda^k}_{P(\lambda)}$$

[1] On a $P(0) = a_r \neq 0$, donc λ est bien racine d'ordre r de $\chi_{(B,A)}$. La formule du a. donne :

$$\begin{aligned}\chi_{(A,B)}(\lambda) &= (-\lambda)^n \sum_{k=s}^r a_k \lambda^{-k} \\ &= (-1)^n \sum_{k=r}^s a_k \lambda^{n-k} \\ &= (-1)^n \sum_{\ell=n-s}^{n-r} a_{n-\ell} \lambda^{\ell} \\ &= (-1)^n (a_r \lambda^{n-r} + \dots + a_s \lambda^{n-s})\end{aligned}$$

[1] Comme $a_r \neq 0$, on a bien $\chi_{(A,B)}$ de degré $n - r$.

d) Procédons par implications circulaires

- 0,5 (i) $\Rightarrow$ (ii) Si B est inversible, on utilise le 1. pour montrer que $\chi_{(A,B)}$ est de degré n .
- 1 (ii) $\Rightarrow$ (iii) D'après le 3.c, si 0 est racine de $\chi_{(B,A)}$ alors $s \geq 1$ et donc le degré de $\chi_{(A,B)}$ est au plus $n - 1$, ce qui contredit (ii).
- 1 (iii) $\Rightarrow$ (i) On a donc $\chi_{(B,A)}(0) \neq 0$, c'est à dire $\det(0 \cdot A - B) \neq 0$ donc $\det(B) \neq 0$ et finalement B inversible.

4. a) Supposons que $B^{-1}A$ est diagonalisable, c'est-à-dire qu'on peut écrire $B^{-1}A = RDR^{-1}$ avec D diagonale. Ce qu'on écrit aussi : $A = BRDR^{-1}$. Posons alors $P = BR$ et $Q = R^{-1}$. Les matrices P et Q sont inversibles et on a :

$$\begin{aligned} PDQ &= BRDR^{-1} = A \\ PI_nQ &= PQ = BRR^{-1} = B \end{aligned}$$

Ce qui dit que $(A, B) \sim (D, I_n)$. Comme I_n est diagonale, on a bien (A, B) diagonalisable.

- b) Réciproquement supposons (A, B) diagonalisable. On a alors $A = PDQ$ et $B = PD'Q$ avec P, Q inversibles et D, D' diagonales. Comme B est inversible, D' l'est aussi. Calculons :

$$\begin{aligned} B^{-1}A &= Q^{-1}D'^{-1}P^{-1} \cdot PDQ \\ &= Q^{-1}D'^{-1}DQ \end{aligned}$$

On remarque que comme D et D' sont diagonales, $\Delta = D'^{-1}D$ l'est aussi et qu'en posant $R = Q^{-1}$, on a $B^{-1}A = R\Delta R^{-1}$ c'est-à-dire que $B^{-1}A$ est diagonalisable.

5. Si (A, B) est diagonalisable alors en utilisant la définition $A = PDQ, B = PD'Q$. Donc¹ $B = PD'Q$ et $A = PDQ$, c'est à dire $(B, A) \sim (D', D)$ et donc (B, A) diagonalisable. L'autre implication est tout aussi évidente. [0,5]

Partie C [7]

1. a) On a $X \in E_0(C)$ ssi $CX = 0$ ssi $A^{-1}BX = 0$ ssi $BX = 0$ ssi $BX = 0 \cdot AX$ ssi $X \in E_0(B, A)$. Donc $E_0(C) = E_0(B, A)$ l'autre égalité étant la définition de E_∞ . [1] **SF**
- b) De même $X \in E_\lambda(C)$ ssi $CX = \lambda X$ ssi $BX = \lambda AX$ ssi $\frac{1}{\lambda}BX = AX$ ssi $X \in E_{1/\lambda}(A, B)$. [1] **SF**
- c) Les deux questions précédentes² montrent que $\lambda \in \text{Sp}(C)$ ssi $1/\lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B)$. [0,5]
2. On a $m_\infty(A, B) = m_0(B, A)$ et le B.3.c permet de conclure : le degré de $\chi_{(A, B)}$ est $n - r$ [1]
où r est l'ordre de 0 dans $\chi_{(B, A)}$. Ici $r = m_0(B, A)$.
En utilisant le 1.c, [1]

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B)} m_\lambda(A, B) &= \sum_{1/\lambda \in \text{Sp}(C)} m_{1/\lambda}(C) \\ &= \sum_{\mu \in \text{Sp}(C)} m_\mu(C) \\ &= n \end{aligned}$$

Car le polynôme caractéristique est scindé (on est dans $\mathbb{C}[X]$) et la somme des multiplicité des racines est égale au degré.

¹C'est un jeu d'écritures

²Et la convention $1/0 = \infty$.

- SF** [0,5] 3. a) On se contente de reprendre la formule trouvée au 2. et d'y insérer la propriété $\mathcal{H}$.
 [1] b) On sait que pour tout λ , $E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A, B)$. Le a. donne alors :

$$\sum_{\mu \in \text{Sp}(C)} \dim(E_\mu(C)) = n$$

Ce qui dit bien que C est diagonalisable.

- [1] c) En échangeant les rôles de A et B , on se retrouve avec la question B.4.

Partie D [/9]

- SF** [1] 1. On a :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a notamment $A_1 = B_1 = (0) \dots$

- SF** [0,5] 2. La matrice de $\lambda g - f$ est $\lambda B_n - A_n \dots$

- SF** [1,5] 3. a) Un calcul rapide donne :

$$c_1(\lambda) = 0, \quad c_2(\lambda) = \lambda, \quad c_3(\lambda) = 0, \quad c_4(\lambda) = \lambda^2.$$

Pour c_3 , on voit que la 1^{re} et 3^e colonne de $\lambda B_3 - A_3$ sont colinéaires. Pour c_4 , on développe par exemple par rapport à la 1^{re} ligne.

- [1] b) Calcul

$$\begin{aligned} c_n(\lambda) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & & \\ \lambda & 0 & -1 & & \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 0 & -1 \\ & & & & \lambda & 0 \end{vmatrix}_n \\ &= (-1)^{1+2} \cdot \lambda \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & & & \\ \lambda & 0 & -1 & & \\ 0 & \lambda & 0 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 0 & -1 \\ & & & & \lambda & 0 \end{vmatrix}_{n-1} \quad (\text{Développement / 1^{re} col.}) \\ &= -\lambda \cdot (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot c_{n-2}(\lambda) \quad (\text{Développement / 1^{re} ligne.}) \\ &= \lambda c_{n-2}(\lambda) \end{aligned}$$

c) On a donc : [1]

$$\begin{aligned} c_{2k}(\lambda) &= \lambda^k c_0(\lambda) = \lambda^k, \\ c_{2k+1}(\lambda) &= \lambda^k c_1(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

d) D'après la définition, (A_n, B_n) est régulier ssi n est pair. [1]

4. a) $X \in E_0(A_4, B_4)$ ssi $A_4(X) = 0$ ssi X est un multiple de $(1, 0, 0, 0) = \mathbf{e}_1$. [0,5]

De même $X \in E_\infty(A_4, B_4)$ ssi $X \in E_0(B_4, A_4)$ ssi $B_4 X = 0$ ssi X est un multiple de $(1, 0, 0, 0) = \mathbf{e}_4$. [0,5]

On obtient donc :

$$\dim(E_0(A_4, B_4)) = \dim(E_\infty(A_4, B_4)) = 1.$$

b) On a $\chi_{(A_4, B_4)}(\lambda) = \lambda^2$ donc $\text{Sp}(A_4, B_4) = \{0\}$ et $m_0(A_4, B_4) = 2$. La formule trouvée [1]
au C.2. ou un calcul direct de $\chi_{(B_4, A_4)}$ donne $m_\infty(A_4, B_4) = 2$.

c) Le couple (A_4, B_4) ne vérifie pas $\mathcal{H}$: il n'est donc pas diagonalisable. [1]