

## DS-2

### 10 novembre 2018

### durée : 4h

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls,  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Notons :

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,

$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui sont inversibles,

$I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ .

**Définitions 1.** Soient  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- On note  $E_\lambda(A, B)$  l'ensemble des matrices colonnes  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  telles que  $AX = \lambda BX$ .
- On dit que  $\lambda$  est **valeur propre du couple**  $(A, B)$  si  $E_\lambda(A, B)$ , n'est pas réduit à  $\{0\}$ , c'est-à-dire si  $\lambda B - A$  n'est pas inversible.
- On note  $\chi_{(A,B)}$  la fonction définie sur  $\mathbb{K}$  par  $\chi_{(A,B)}(\lambda) = \det(\lambda B - A)$  et  $\text{Sp}(A, B)$  l'ensemble des valeurs propres du couple  $(A, B)$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments de  $\mathbb{K}$  tels que  $\chi_{(A,B)}(\lambda) = 0$ .

Dans le cas particulier où  $B = I_n$ , on remarquera que ces définitions correspondent aux notions de valeur propre, d'espace propre et de polynôme caractéristique de  $A$ .

Ainsi,  $E_\lambda(A, I_n)$  et  $\chi_{(A, I_n)}$  sont notés plus simplement  $E_\lambda(A)$  et  $\chi_A$ .

*Les différentes parties sont largement indépendantes.*

### Partie A Diagonalisabilité dans un cas particulier

Soit :  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 12 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

On note aussi  $\mathcal{F} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  pour  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,

1. a) Montrer que  $B$  n'est pas inversible.
- b) Montrer que  $A$  est inversible.
- c) Vérifier<sup>1</sup> que  $C = A^{-1}B$ .

<sup>1</sup>En faisant le *minimum* de calculs ! Ça peut se faire en une ligne...

2. a) Montrer que  $\chi_{(A,B)} = (2\lambda - 1)^2$ .  
 b) En déduire  $\text{Sp}(A, B)$ .  
 c) Déterminer une base de  $E_{1/2}(A, B)$  et en déduire que  $\dim E_{1/2}(A, B) = 2$ .
3. a) Calculer  $\chi_{(B,A)}(\lambda)$  et en déduire que  $\text{Sp}(B, A) = \{0, 2\}$ .  
 b) Établir les identités suivantes :

$$E_0(B, A) = \text{vect} \{ \mathbf{u}_1 \} = E_0(C) \text{ et } E_2(B, A) = \text{vect} \{ \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \} = E_2(C).$$

- c) En déduire que  $\dim E_0(B, A) + \dim E_2(B, A) = 3$ .
4. a) Montrer que  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  formée de vecteurs propres de  $C$ .  
 b) Déterminer explicitement une matrice  $R \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  telle que  $C = RDR^{-1}$ .  
 c) Montrer que  $B = ARDR^{-1}$ .  
 d) Justifier qu'il existe<sup>2</sup>  $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  et  $Q \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$  telles que  $A = PI_3Q$  et  $B = PDQ$ .

**Définitions 2.** Soient  $(A, B, A', B') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^4$ .

- On dit que le couple  $(A, B)$  est **régulier** s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\chi_{(A,B)}(\lambda) \neq 0$ .
- On dit que le couple  $(A, B)$  est **équivalent** au couple  $(A', B')$  et on note  $(A, B) \sim (A', B')$  si il existe  $P, Q$  inversibles telles que :

$$A = PA'Q \text{ et } B = PB'Q.$$

- On dit que le couple  $(A, B)$  est **diagonalisable** si il existe  $D$  et  $D'$  diagonales et telles que :

$$(A, B) \sim (D, D').$$

## Partie B Régularité et diagonalisabilité

1. Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ .  
 a) On suppose dans cette question que  $B$  est inversible. Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , exprimer  $\chi_{(A,B)}(\lambda)$  en fonction de  $\chi_{B^{-1}A}(\lambda)$  et en déduire que  $\chi_{(A,B)}$  est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.  
 b) On suppose dans cette question que  $n \geq 2$ . Donner un exemple<sup>3</sup> de couple  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  pour lequel la fonction  $\chi_{(A,B)}$  est la fonction nulle alors que ni  $A$  ni  $B$  n'est la matrice nulle.

On admet que  $\chi_{(A,B)}$  est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$ .

2. a) Montrer que :

$$(A, B) \sim (A', B') \iff \exists P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \mid \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda B - A = P(\lambda B' - A')Q$$

<sup>2</sup>À nouveau : rester simple. Les matrices  $P$  et  $Q$  peuvent dépendre explicitement de  $A$ .

<sup>3</sup>Chercher des matrices pour lesquelles il est *facile* de calculer le déterminant.

b) Établir que si  $(A, B)$  et  $(A', B')$  sont équivalents, alors il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$ , non nul, tel que  $\chi_{(A,B)} = \alpha \cdot \chi_{(A',B')}$ , puis que  $\text{Sp}(A, B) = \text{Sp}(A', B')$ .

3. On suppose dans cette question que  $(A, B)$  est régulier.

a) Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \chi_{(A,B)}(\lambda) = (-\lambda)^n \cdot \chi_{(B,A)}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

b) Montrer que  $(B, A)$  est régulier.

c) On suppose dans cette question que  $r$  et  $s$  sont deux entiers tels que  $1 \leq r \leq s \leq n$  et  $a_r, a_{r+1}, \dots, a_s$  des éléments de  $\mathbb{K}$  tels que  $a_r \neq 0$  et  $a_s \neq 0$ . On suppose également que  $\chi_{(B,A)}$  s'écrit sous la forme :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \chi_{(B,A)}(\lambda) = \sum_{k=r}^s a_k \lambda^k.$$

Montrer que 0 est racine de  $\chi_{(B,A)}$  d'ordre  $r$  et que  $\chi_{(A,B)}$  est de degré  $n - r$ .

d) Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i)  $B$  est inversible ;
- ii)  $\chi_{(A,B)}$  est de degré  $n$  ;
- iii)  $0 \notin \text{Sp}(B, A)$ .

4. On suppose dans cette question que  $B$  est inversible. Montrer que  $B^{-1}A$  est diagonalisable si et seulement si  $(A, B)$  est diagonalisable.

5. Justifier que  $(A, B)$  est diagonalisable si et seulement si  $(B, A)$  l'est.

**Definitions 3.** Soit  $(A, B)$  un couple régulier. On suppose à partir de maintenant que  $B$  n'est pas inversible.

- Pour  $\lambda \in \text{Sp}(A, B)$ , on note  $m_\lambda(A, B)$  l'ordre de multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_{(A,B)}$ .
- On note  $\text{Sp}_\infty(A, B) = \text{Sp}(A, B) \cup \{\infty\}$ ,  $m_\infty(A, B) = m_0(B, A)$  l'ordre de multiplicité de 0 en tant que racine de  $\chi_{(B,A)}$  et  $E_\infty(A, B) = E_0(B, A)$ .

On cherche un critère de diagonalisabilité de  $(A, B)$  faisant intervenir  $\dim(E_\lambda(A, B))$ .

- On dit que  $(A, B)$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$  si :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(A, B), \dim(E_\lambda(A, B)) = m_\lambda(A, B).$$

## Partie C Un critère de diagonalisabilité

Dans toute cette partie on suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$  un couple régulier. Il existe donc  $\lambda_0$  tel que  $\lambda_0 B - A$  est inversible.

Dans toute la suite de cette partie<sup>4</sup>, on suppose pour simplifier les notations que  $\lambda_0 = 0$  si bien que  $A$  est inversible.

On note  $d$  le degré de  $\chi_{(A,B)}$  et  $C = A^{-1}B$ .

<sup>4</sup>Et seulement celle-ci !

1. a) Montrer que  $E_0(C) = E_0(B, A) = E_\infty(A, B)$ .  
 b) Montrer que si  $\lambda \neq 0$  alors  $E_\lambda(C) = E_{1/\lambda}(A, B)$ .  
 c) Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des éléments distincts de  $\mathbb{C}$ . Justifier que si  $\text{Sp}(C) = \{\lambda_0, \dots, \lambda_k\}$ , alors  $\text{Sp}_\infty(A, B) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_k} \right\}$  où on a posé  $\frac{1}{0} = \infty$ .
2. Vérifier que  $m_\infty(A, B) = n - d$ , puis que  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B)} m_\lambda(A, B) = n$ .
3. On suppose dans toute la suite de cette partie que  $(A, B)$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$ .  
 a) Montrer que  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_\infty(A, B)} \dim(E_\lambda(A, B)) = n$ .  
 b) Montrer que  $C$  est diagonalisable.  
 c) Établir que le couple  $(A, B)$  est diagonalisable.

Dans la suite du problème, on admettra que si  $(A, B)$  est régulier et que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  alors  $(A, B)$  est diagonalisable si et seulement si  $(A, B)$  vérifie la propriété  $\mathcal{H}$ .

## Partie D Un exemple de non diagonalisabilité

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .  
 On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{C}^n$  tel que :

$$f(\mathbf{e}_1) = 0 \quad \text{et si } n \geq 2, \quad \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad f(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_{k-1}$$

On note  $A_n$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $B_n = A_n^\top$ .  
 On note  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $B_n$ .  
 Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\chi_{(A_n, B_n)}(\lambda)$  sera noté  $c_n(\lambda)$ . On définit de plus  $c_0(\lambda) = 1$ .

1. Donner la forme explicite des matrices  $A_n$  et  $B_n$ .
2. Vérifier que la matrice de  $\lambda g - f$  dans  $\mathcal{B}$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ \lambda & 0 & -1 & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & \lambda & 0 & -1 \\ & & & & \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

3. a) Calculer  $c_1(\lambda)$ ,  $c_2(\lambda)$ ,  $c_3(\lambda)$  et  $c_4(\lambda)$ .  
 b) Montrer que pour  $n \geq 2$ ,  $c_n(\lambda) = \lambda \cdot c_{n-2}(\lambda)$ .  
 c) En déduire, pour  $k \in \mathbb{N}$ , les expressions de  $c_{2k}(\lambda)$  et  $c_{2k+1}(\lambda)$ .  
 d) Donner une condition sur  $n$  pour que  $(A_n, B_n)$  soit régulier.
4. a) Déterminer  $\dim(E_0(A_4, B_4))$  et  $\dim(E_\infty(A_4, B_4))$ .  
 b) Calculer  $m_0(A_4, B_4)$  et  $m_\infty(A_4, B_4)$ .  
 c) Le couple  $(A_4, B_4)$  est-il diagonalisable ?