DS-3 — Corrigé

I [/]

Partie A Cours [/]

C'est du cours ! Donc je ne détaille pas les points : tout ou rien !

ⓐ [] 1.

ⓐ [] 2.

Partie B Un espace de fonctions [/]

SF [] 1. Si φ est un fonction continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ alors on a, par définition φ intégrable ssi $|\varphi|$ intégrable. Ici $\varphi(t) = e^{-pt} f(t)$...

SF [] 2. Pour tout $t > 0$, $0 \leq \left|e^{-pt} f(t)\right| \leq |f(t)|$ et f est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc par majoration $t \longmapsto e^{-pt} f(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, c'est à dire $f \in \mathrm{E}$.

SF [] 3. L'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur $]0, +\infty[$ est un espace vectoriel. C'est ce qui va permettre de conclure.

- E est un sous-ensemble de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- La fonction nulle est un élément de E.
- Si f, g sont dans E et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors, pour tout $p > 0$, $t \longmapsto e^{-pt} f(t)$ et $t \longmapsto e^{-pt} g(t)$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et donc $t \longmapsto e^{-pt}(\lambda f(t) + g(t))$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. C'est-à-dire $\lambda f + g \in \mathrm{E}$.

SF [] 4. a) Pour tout $p > 0$, la fonction $t \longmapsto e^{-pt} = \mathbf{1}(t) e^{-pt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. donc $\mathbf{1} \in \mathrm{E}$.

[] b) Soit $p > 0$ (arbitraire). La fonction $u : t \longmapsto e^{-pt}/\sqrt{t}$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$. On a donc deux problèmes.

- Problème en 0^+. On a $u(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/2}}$. Donc par comparaison avec un exemple de Riemann en 0^+ de paramètre $1/2 < 1$, u est intégrable sur $]0, 1]$.
- Problème en $+\infty$. On a $t^2 u(t) \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} 0$, donc $u(t) \underset{+\infty}{=} o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$. Donc par comparaison avec un exemple de Riemann en $+\infty$ de paramètre $2 > 1$, u est intégrable sur $[1, +\infty[$.

La fonction u est donc intégrable sur $]0, +\infty[$: f_1 est un élément de E.

[] c) On a $f_1^2(t) = 1/t$. En reprenant l'étude précédente, on a $e^{-pt} f_1^2(t) \underset{0^+}{\sim} 1/t$ et donc $t \longmapsto e^{-pt} f_1^2(t)$ n'est pas intégrable sur $]0, 1]$

On a donc $f_1^2 \notin \mathrm{E}$. *Remarque : c'était prévisible ! Le texte précédant la question 5. donnait la conclusion...*

5. a) On étudie $t \longmapsto te^{-qt}$. Cette fonction est positive sur $\mathbb{R}_+$ et a un maximum en $t = 1/q$. Elle est donc bornée. Notons M_q un majorant de cette fonction. [] **SF**

   b) Procédons comme demandé : [] **SF**

$$\begin{aligned}\left|tf(t)e^{-pt}\right| &= te^{-qt} \cdot \left|e^{-rt}f(t)\right| \\ &\leq M_q\left|e^{-rt}f(t)\right|\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathrm{E}$ et $r > 0$, la fonction $t \longmapsto e^{-rt}f(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc par linéarité puis majoration $t \longmapsto tf(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. *cqfd.*

   c) Il s'agit d'une récurrence sur k. L'initialisation est simplement une lecture de l'énoncé : la fonction f qui s'écrit aussi $t \longmapsto t^0 f(t) = f(t)$ est dans E. Si $t \longmapsto t^k f(t)$ est dans E, le b. permet de dire que $t \cdot t^k f(t)$ est aussi dans E. [] **SF**

   d) On réunit 4.a ($f = \mathbf{1}$) et 5.c pour dire : pour tout k, $\theta_k : t \longmapsto t^k$ est dans E. La base canonique de $\mathbb{C}[X]$ est donc dans E. Comme E est un espace vectoriel, $\mathbb{C}[X] \subset \mathrm{E}$. [] **SF**

Partie C La transformée de Laplace []

1. Soit $f \in \mathrm{E}$. Pour tout $p > 0$, $\mathcal{L}(f)(p)$ a un sens (c'est inclus dans la définition de $f \in \mathrm{E}$) et est un nombre. Donc $\mathcal{L}(f)$ est bien une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$. [] **SF**
La linéarité de $\mathcal{L}$ vient de la linéarité de l'intégrale d'une fonction intégrable.

2. a) On intègre par parties : [] **SF**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta_{k+1})(p) &= \int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t^{k+1} \cdot \frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (k+1)t^k \cdot \frac{e^{-pt}}{-p}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{k+1}{p}\mathcal{L}(\theta_k)(p)\end{aligned}$$

   b) Le cours donne : []

$$\mathcal{L}(\theta_0)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}.$$

Par récurrence[1], on montre que :

$$\forall p > 0,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{L}(\theta_k)(p) = \frac{k!}{p^{k+1}}.$$

3. a) Pour[2] tout $p \in [a, b]$ et tout $t > 0$, $at \leq pt \leq bt$ et donc $e^{-bt} \leq e^{pt} \leq e^{-at}$. [] **SF**

   b) En un paquet. Notons $u(p, t) = e^{-pt}f(t)$. []

[1] Le dire suffisait : on vous aurait cru.

[2] La je suis déjà entrain de détailler. On demandait d'être bref !

- Pour tout $t > 0$, la fonction $u(\cdot, t)$ est $\mathcal{C}^1$. On a :

$$\frac{\partial u}{\partial p}(p,t) = -tf(t)e^{-pt}.$$

- Pour tout $p > 0$, la fonction $u(p, \cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (car $f \in \mathrm{E}$).
La fonction $\dfrac{\partial u}{\partial p}(p, \cdot)$ edst continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout segment $[a, b]$ $(0 < a < b)$ de $]0, +\infty[$, on a :

$$\forall p \in [a,b],\ \forall t > 0,\ \left|\frac{\partial u}{\partial p}(p,t)\right| = \left|t(ft)e^{-pt}\right| \leq \left|t(ft)e^{-at}\right| = \varphi(t)$$

Comme $a > 0$ et en utilisant le B.5.b, la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre (version locale[3]) permet donc de conclure que $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et :

$$\left[\mathcal{L}(f)\right]'(p) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f_1)(p)$$

où $f_1(t) = -tf(t)$.

[] c) En se servant du B.5.c, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^k$ et

$$\frac{\mathrm{d}^k\mathcal{L}(f)}{\mathrm{d}p^k}(p) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

[] 4. Posons $u(p,t) = f(t)e^{-pt}$. On a :

- Pour tout $t > 0$, $u(\cdot, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $p \geq 0$, $u(p, \cdot)$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $p \geq 0$, tout $t > 0$, $|u(p,t)| \leq |f(t)|$ et f, donc $|f|$, est intégrable.

En utilisant le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

[] 5. a) Posons $f_n(t) = e^{-p_n t}f(t)$.

- Pour tout $t > 0$, $f_n(t) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0 = g(t)$ et g est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $t > 0$, $|f_n(t)| \leq \left|e^{-t}f(t)\right| = \varphi(t)$. Comme $f \in \mathrm{E}$, φ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Le théorème de la convergence dominée permet de conclure que g est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} \int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$$

C'est-à-dire :

$$\mathcal{L}(f)(p_n) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$$

[3] On pouvait aussi dire : version « sur tout segment ».

b) Comme la suite $\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arbitraire qui tend vers $+\infty$, on déduit du a. que []

$$\mathcal{L}(f)(p) \xrightarrow[p \longrightarrow +\infty]{} 0$$

6. a) On intègre par parties : [] **SF**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f')(p) &= \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[f(t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t)\cdot(-p)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - f(0) + p\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

b) On a donc, pour $p > 0$, [] **SF**

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(p) &= \frac{f(0)}{p} + \frac{\mathcal{L}(f')(p)}{p} \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{f(0)}{p} + \frac{o(1)}{p} \quad (5.\text{b}) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{p}.\end{aligned}$$

II Séries entières [/]

Partie A continuité en une borne de la somme [/]

1. On sait que comme $R = 1$, $]-1,1[\subset \mathcal{D}_f \subset [-1,1]$ De plus on sait que f est définie en 1. En conclusion, $\mathcal{D}_f$ ne peut prendre comme valeur que $]-1,1]$ et $[-1,1]$. []

2. a) La série $\sum a_n$ converge, sa suite des restes tend donc vers 0. Donc $R_n \longrightarrow 0$, donc $\left(R_n\right)$ est bornée. [] **SF**

b) Observons : $R_{n-1} = a_n + a_{n+1} + \cdots$ et $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$. On a donc $R_n - R_{n-1} = -a_n$. [] **SF**

c) On a : [] **SF**

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} R_k(x^k - x^{k+1}) &= \sum_{k=0}^{n} R_k x^k - \sum_{k=1}^{n+1} R_{k-1}x^k \\ &= R_0 + \sum_{k=1}^{n}(R_k - R_{k-1})x^k - R_n x^{n+1} \\ &= R_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k x^k - R_n x^{n+1}\end{aligned}$$

[] d) Comme $\left(R_n\right)$ est bornée et que $|x| < 1$, $R_n x^{n+1} \longrightarrow 0$. De plus $\sum a_n x^n$ converge et donc en observant le membre de droite :

$$\sum_{k=0}^{n} R_k(x^k - x^{k+1}) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} R_0 - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k - 0 = S - a_0 - \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k = S - f(x)$$

Ce qui donne bien le résultat attendu.

SF [] 3. a) La suite $\left(R_n\right)$ tend vers 0. Donc, par définition, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que si $n \geq N$ alors $|R_n| \leq \varepsilon$.

SF [] b) Majorons pour $m \geq N$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=N}^{m} R_n(x^n - x^{n+1})\right| &\leq \sum_{n=N}^{m} |R_n|(x^n - x^{n+1}) \\
&\leq \varepsilon \sum_{n=N}^{m} (x^n - x^{n+1}) \\
&\leq \varepsilon(x^N - x^{m+1}) \\
&\leq \varepsilon x^N
\end{aligned}$$

Pour le résultat demandé, il suffit alors de faire tendre $m \longrightarrow +\infty$.

[] c) On sait que si $x \longrightarrow 1$, le polynôme $\sum_{n=0}^{N-1} R_n(x^n - x^{n+1}) \longrightarrow 0$. La définition de cette limite fournit l'existence de η.

SF [] d) On majore brutalement :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})\right| &\leq \left|\sum_{n=0}^{N-1} R_n(x^n - x^{n+1})\right| + \left|\sum_{n=N}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Partie B Un calcul de limite [/]

SF [] 1. a) Utilisons la règle de d'Alembert. Pour $x \neq 0$, notons $u_n = |\sqrt{n} x^n]$. On a $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}|x| \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} |x|$$

Donc :

- Si $|x| < 1$ alors $\sum u_n$ converge, c'est-à-dire $\sum \sqrt{n} x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement et donc $\sum \sqrt{n} x^n$ diverge grossièrement.

Le rayon de convergence est donc $R = 1$.

SF [] b) On le voit de suite : ces deux séries divergent grossièrement.

SF [] c) On a donc $\mathcal{D}_g =]-1, 1[$.

2. a) Calcul : [] **SF**

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[,\ (1-x)g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}x^{n+1}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}x^n-\sum_{m=1}^{+\infty}\sqrt{m-1}x^m \quad (m=n+1)\\ &= 0+\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}x^n \quad (a^2-b^2=...)\end{aligned}$$

On voit donc que le rayon de convergence R_h de la série entière dont la somme est h vérifie[4] $R_h\geq 1=\min(R,+\infty)$.

b) Cours ! La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ satisfait aux hypothèses du théorème spécial des séries alternées car $\displaystyle\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante positive qui tend vers 0. La conclusion est alors claire : $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ converge. La fonction h est donc définie en -1. [] **SF**

c) D'après la propriété annoncée, h est continue en -1 car le rayon de convergence R de h vaut au moins 1 et que h est définie en -1. Le théorème spécial des séries alternées dit aussi : $h(-1)=-1+R_1=-1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+R_2$ avec $R_1\geq 0$ et $R_2\leq 0$.Or $2\leq\sqrt{2}+1\leq 3$ et donc $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\leq\dfrac{1}{2}$. []

3. On a $-1\notin\mathcal{D}_g$ (question 1.c), mais $h(x)=(1-x)g(x)$ tend vers une limite quand $x\longrightarrow -1$. Comme $1-x\longrightarrow 2$, on a aussi g qui a une limite en -1 et cette limite est $h(-1)/2$, d'où le résultat final. []

[4]En fait, un calcul précis montre $R_h=1$