

DS-3

8 décembre 2018

durée : 4h

I Transformée de Laplace

Notations

Dans tout cet exercice, on note :

- $\mathbf{1}$ la fonction constante $t \mapsto 1$.
- pour $k \in \mathbb{N}$, θ_k la fonction $t \mapsto t^k$. On a notamment $\theta_0 = \mathbf{1}$.
- E l'ensemble des fonctions f , continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $p > 0$, $t \mapsto e^{-pt}f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est à dire :

$$\begin{aligned} f \in E &\iff \forall p > 0, t \mapsto e^{-pt}f(t) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\iff \forall p > 0, \int_0^{+\infty} e^{-pt}f(t) dt \text{ converge absolument} \end{aligned}$$

- pour $f \in E$, on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px} dx.$$

C'est la *transformée de Laplace* de f .

Partie A Cours

1. Citer le théorème de la convergence dominée.
2. Citer le théorème qui permet de montrer que $F : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On donnera les hypothèses « locales ».

Partie B Un espace de fonctions

1. Justifier que $f \in E$ si et seulement si $|f| \in E$.
2. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ alors $f \in E$.
3. Montrer que E est un espace vectoriel.
4. a) Justifier que la fonction constante $\mathbf{1} : t \mapsto 1$ est dans E .

b) Montrer que $f_1 : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est dans E.

c) Est ce que f_1^2 est un élément de E ?

L'ensemble E n'est donc **pas** stable par le produit de fonctions.

5. Soit $f \in E$.

a) Montrer que pour tout $q > 0$, $t \mapsto te^{-qt}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Dédurre de la question précédente que pour tout $p > 0$, $t \mapsto tf(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Indication : on considérera $q \in]0, p[$ et on écrira $p = q + (p - q) = q + r$.

c) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^k f(t)$ est un élément de E.

d) Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales est inclus dans E.

Partie C La transformée de Laplace

1. Montrer que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E vers l'ensemble des applications définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Donner pour tout $p > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, une relation entre $\mathcal{L}(\theta_{k+1})(p)$ et $\mathcal{L}(\theta_k)(p)$.

b) Soit $p > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Donner la valeur de $\mathcal{L}(\theta_k)(p)$ en fonction de k et p .

3. Soit $f \in E$.

a) Soient a, b tels que $0 < a < b$. Justifier brièvement que pour tout $p \in [a, b]$ et tout $t > 0$ on a : $0 \leq |te^{-pt}f(t)| \leq |te^{-at}f(t)|$.

b) En déduire que

i) $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii) il existe $f_1 \in E$, qu'on déterminera, tel que $[\mathcal{L}(f)]' = \mathcal{L}(f_1)$.

c) En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. On suppose dans cette question que f est intégrable sur E. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

On fera bien attention au fait que 0 est inclus dans l'intervalle considéré.

5. Soit $f \in E$.

a) Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 1 . Montrer que si $p_n \rightarrow +\infty$ alors $\mathcal{L}(f)(p_n) \rightarrow 0$.

b) Que peut-on en déduire pour la fonction $\mathcal{L}(f)$?

6. Dans cette question on suppose f continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f' \in E$.

a) Montrer que pour tout $p > 0$, $\mathcal{L}(f')(p) = -f(0) + p\mathcal{L}(f)(p)$.

b) En déduire que si $f(0) \neq 0$:

$$\mathcal{L}(f)(p) \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f(0)}{p}$$

II Séries entières

Partie A Continuité en une borne de la somme

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R = 1$ et de somme notée f . On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, c'est à dire que la fonction f est définie en $x = 1$.

1. Donner les deux valeurs possibles pour le domaine de définition de f .

On note S la somme de la série de terme général a_n ($n \geq 0$) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste d'ordre n . À savoir :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = S - \sum_{k=0}^n a_k$$

2. a) Justifier que la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

b) Pour $n \geq 1$, déterminer $R_n - R_{n-1}$.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^n R_k(x^k - x^{k+1}) = R_0 - \sum_{k=1}^n a_k x^k - R_n x^{n+1}$.

d) En déduire que pour $x \in [0, 1[$ la série $\sum_{n \geq 0} R_n(x^n - x^{n+1})$ converge et que :

$$f(x) = S - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1}).$$

3. Fixons $\varepsilon > 0$.

a) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $n \geq N$ alors $|R_n| \leq \varepsilon$.

b) Montrer alors que $\left| \sum_{k=N}^{+\infty} R_k(x^k - x^{k+1}) \right| \leq \varepsilon x^N$.

c) Justifier qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in [1 - \eta, 1]$ alors : $\left| \sum_{k=0}^{N-1} R_k(x^k - x^{k+1}) \right| \leq \varepsilon$

d) En déduire que pour tout $x \in [1 - \eta, 1]$,

$$|f(1) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

On vient donc de montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. Les questions précédentes permettent alors de démontrer la propriété suivante :

Soit $\sum_{n \geq 0} \alpha_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme φ .

Si $\sum_{n \geq 0} \alpha_n R^n$ converge (respectivement $\sum_{n \geq 0} \alpha_n (-R)^n$ converge), c'est à dire φ définie en R (respectivement $-R$) alors φ est continue sur $[0, R]$ (respectivement $[-R, 0]$).

Partie B Un calcul de limite

On définit les fonctions g et h par :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} x^n, \quad h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} x^n$$

1. a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière dont g est la somme.

b) Quelle est la nature des séries $\sum_{n \geq 0} \sqrt{n} R^n$ et $\sum_{n \geq 0} \sqrt{n} (-R)^n$?

c) Donner l'ensemble de définition de g .

2. a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $h(x) = (1-x)g(x)$.

b) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} (-1)^n$ converge.

c) En déduire que h est continue en -1 et que l'on a :

$$-1 \leq h(-1) \leq -\frac{1}{2}$$

3. Déduire des question précédentes que g n'est pas définie en -1 et que g a une limite ℓ en -1 qui vérifie :

$$-\frac{1}{2} \leq \ell \leq -\frac{1}{4}$$