DS-4 — Corrigé

I [/3]

[1] 1. Points clefs : diagonalisable, base orthonormée de vecteurs propres.

[1] 2. On attendait une formule du genre : $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

[1] 3. Sans l'indication minimale de l'intervalle dans lequel le DSE est valide : 0.

II [/18]

Partie A [/7]

[1] 1. Cours à peine caché. Notons $\Delta = \mathrm{vect}\{u\}$. Soit $x \in \mathrm{E}$. On a : $x = p_u(x) + (x - p_u(x)) = y + z$. Par définition $y = p_u(x) \in \Delta$ et $\langle z, u \rangle = \langle x, u \rangle - \langle x, u \rangle \|u\|^2 = 0$. On a donc décomposé x dans $\Delta \oplus^\perp \Delta^\perp$. La composante dans Δ est par définition le projeté orthogonal de x sur Δ.

[1] 2. La trace d'un projecteur est son rang. Comme $\operatorname{Im} p_u = \mathrm{vect}\{u\}$, on a $\mathrm{tr}(p_u) = \mathrm{rg}(p_u) = 1$.

[0,5] 3. a) Calcul !

[0,5] b) Si $u \perp v$, $p_u \circ p_v = 0$.

[1] 4. $y = p_u(x)$ ssi $Y = \Pi_U X$. Or $p_u(x) = \langle x, u \rangle u = X^\mathsf{T} U u = U^\mathsf{T} X u$. On a donc, puisque $U^\mathsf{T} X$ est un nombre, $Y = (U^\mathsf{T} X) U = U(U^\mathsf{T} X) = (UU^\mathsf{T}) X$.

[1] 5. a) On a : $\mathrm{tr}(XY^\mathsf{T}) = \mathrm{tr}(Y^\mathsf{T} X)$. Comme $Y^\mathsf{T} X$ est un nombre, on a $\mathrm{tr}(XY^\mathsf{T}) = Y^\mathsf{T} X = \langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.

[1] b) C'est le même genre de calcul :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\Pi_U A) &= \mathrm{tr}(A \Pi_U) \\ &= \mathrm{tr}(AUU^\mathsf{T}) \\ &= \mathrm{tr}((AU)U^\mathsf{T}) \\ &= \langle AU, U \rangle . \end{aligned}$$

[1] c) Par définition $\mathrm{tr}(p_u \circ f) = \mathrm{tr}(\Pi_U A)$ et donc $\mathrm{tr}(p_u \circ f) = \langle AU, U \rangle = \langle f(u), u \rangle$.

Partie B [/6]

1. a) On sait qu'il existe une base orthonormée $(u_1, \ldots, u_n)$ formée de vecteurs propres pour u. Si on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les valeurs propres associés, on a : [1]

$$\begin{aligned} f(x) &= f\Big(\sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle\, u_k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle\, f(u_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle\, \alpha_k u_k \end{aligned}$$

   b) Par linéarité $\operatorname{tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \operatorname{tr}(p_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. On aurait aussi pu dire que $\operatorname{tr}(f)$ est la somme des valeurs propres. [1]

   c) Comme $\left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k u_k, \sum_{\ell=1}^{n} y_\ell u_\ell \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ et que $x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle\, u_k$: [1]

$$\langle f(x), x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle x, u_k \rangle^2 .$$

   d) On se souvient que $f(u_k) = \alpha_k u_k$ et on utilise la linéarité de f... [1]

2. Utilisons les notations du 1, en remplaçant f par φ.
   Si φ est positif alors, comme $\langle \varphi(u_k), u_k \rangle = \alpha_k$, on a $\alpha_k \geq 0$. [1]
   Réciproquement si toutes les valeurs propres de φ sont positives alors la formule du 1.c montre que $\langle \varphi(x), x \rangle$ est une somme de réels positifs et donc on a bien φ positif. [1]

Partie C [/5]

1. a) Le A.5.c et le B.1.c donnent : [1]

$$\operatorname{tr}(p_w \circ f) = \langle f(w), w \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu_k^2.$$

   b) Calculons : [1]

$$\operatorname{tr}(p_w \circ f) - 1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu_k^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\mu_k^2 - 1)$$

   c) On a $\operatorname{tr}(p_w \circ f) = 1$ si et seulement si la somme de nombres négatifs[1] $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\mu_k^2 - 1)$ est nulle. Donc chacun d'entre eux est nul. On a alors le choix $\alpha_k = 0$ ou $\mu_k = \pm 1$. Mais, comme w est de norme 1, une seule de ses coordonnées peut être égale à ± 1, les autres devant être nulles. La conclusion s'impose alors car $\pm u_k$ est bien de dorme 1... [2]

[1] Le vecteur w est de norme 1 : ses coordonnées sont donc en valeurs absolue plus petites que 1...

[1] 2. $\mathrm{tr}(f^2) = \sum_{k=1}^{n} \alpha^2$. Donc $\mathrm{tr}(f^2) - \mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(1-\alpha_k)$. Avec les mêmes arguments que supra on ne peut avoir cette égalité que ssi un seul des α_k vaut 1, les autres étant nuls...

III [/]

Partie A [/9]

SF [1] 1. a) Les événements $R_1, \ldots, R_n$ sont clairement deux à deux **disjoints** (ou **incompatibles**). Ceci est du au qualificatif « pour la première fois » de la définition de R_k.

[1] b) Ces deux événements sont tous deux l'événement : « $\mathcal{E}$ est réalisé au moins une fois ».

[0,5] c) i) On a : $B_{n+1} = B_n \cup R_{n+1}$. On a donc bien $B_n \subset B_{n+1}$.

[0,5] ii) Comme pour tout n, $R_n \subset B_n$, on a $R \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

[0,5] Réciproquement, par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R = B_n \cup \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} R_k$ et donc $B_n \subset R$. De ce fait, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \subset R$.

[1] d) Le théorème de la continuité monotone dit :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

Autrement dit :

$$\mathbb{P}(R) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R_n).$$

[0,5] e) Si $\mathbb{P}(R) = 1$ alors il est presque certain qu'$\mathcal{E}$ est réalisé au moins une fois.

[0,5] 2. a) Si $\mathcal{E}$ est réalisé pour la première fois à l'instant n, il est réalisé à l'instant n, donc $R_n \subset A_n$ et si $\mathcal{E}$ est réalisé à l'instant n alors il est réalisé pour la première fois au plus tard à l'instant n. On $R_1 \cup \cdots \cup R_n$ est l'événement : « $\mathcal{E}$ est réalisé pour la première fois à un instant entre 1 et n ». On a donc bien $A \subset R_1 \cup \cdots \cup R_n$.

[1] b) Comme $A \subset R_1 \cup \cdots \cup R_n$, on a :

$$A_n = A_n \cap \bigcup_{i=1}^{n} R_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A_n \cap R_i)$$

Donc, comme les événements $R_1, \ldots, R_n$ sont deux à deux disjoints, il en est de même pour $A_n \cap R_1, \ldots, A_n \cap R_n$ et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_n \cap R_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_n \mid R_i)\mathbb{P}(R_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n-i})\mathbb{P}(R_i) \quad \text{(formule } (*) \text{ avec } n-i \text{ et } i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} r_i \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} a_j r_{n-j} \quad (j = n-i)
\end{aligned}$$

3. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq 1$ et $0 \leq r_n \leq 1$ (ce sont des *probabilités*), les rayons de convergences des deux séries entières sont plus grands que celui de $\sum_{n \geq 0} s^n$ qui vaut 1. [1]

4. Pour $s \in [0, 1[$ (donc dans l'intervalle ouvert de convergence des deux séries entières), calculons : [1,5]

$$\begin{aligned}
A(s)G(s) &= \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} r_n s^n\Big) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k r_{n-k}\Big) s^n \\
&= a_0 r_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k r_{n-k}\Big) s^n \\
&= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k r_{n-k}\Big) s^n \quad (r_0 = 0) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s^n \\
&= -a_0 + A(s) \\
&= -1 + A(s)
\end{aligned}$$

Partie B [/9]

1. a) À l'instant n, le nombre X_n de boules dans l'urne U suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$. Pour qu'il y ait autant de boules dans les deux urnes, il faut que le nombre total de boules soit pair et donc $a_{2n+1} = 0$. De même, A_{2n} est réalisé si et seulement si à l'instant $2n$ il y a exactement n boules dans l'urne U et n dans l'urne V. La valeur de a_{2n} est alors claire : elle vaut $\mathbb{P}(X_{2n} = n)$. [1] **SF**

SF [1] b) Calculons :

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \binom{2n}{n} p^n q^n \\ &= \frac{(2n)^2}{(n)!2} p^n q^n \\ &\sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\right)^2} p^n q^n \\ &\sim \frac{2^{2n} p^n q^n}{\sqrt{\pi n}} \\ &\sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

SF [1] c) Pour $s \neq 0$, posons $u_n = a_{2n} s^{2n}$. On a $u_n > 0$ et :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &\sim \frac{(4pqs^2)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)\pi}} \cdot \frac{\sqrt{n\pi}}{(4pqs^2)^n} \\ &\sim 4pqs^2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\ &\xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 4pqs^2 \end{aligned}$$

Donc, en utilisant la règle de d'Alembert :

- Si $4pqs^2 < 1$, c'est-à-dire $|s| < \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}$ alors la série $\sum a_{2n} s^{2n}$ converge absolument.
- Si $4pqs^2 > 1$, c'est-à-dire $|s| > \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}$ alors la série $\sum a_{2n} s^{2n}$ diverge grossièrement.

Par définition, le rayon de convergence de $\sum a_{2n} s^{2n}$ est donc $\rho = \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}$.

[1] d) Utilisons la formule donnée :

$$A(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{(4pqs^2)^n}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqs^2}}$$

La valeur de $G(s)$ est évidente[2].

[1] e) Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\sqrt{1-x} = 1 - \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{1-t}}$ (on a dérivé $\sqrt{1-x}$ et utilisé le théorème fondamental de l'intégration). Donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1, 1[, \ \sqrt{1-x} &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{t^n}{2^{2n}} \,\mathrm{d}t \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{(n+1) 2^{2n+1}} \end{aligned}$$

[2] Et ne rapporte rien !

On a donc pour tout $s \in [0, R[$: [1]

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \cdot 2\frac{(pqs^2)^{n+1}}{(n+1)} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \binom{2m-2}{m-1} \cdot 2\frac{(pqs^2)^m}{m} \quad (m = n+1) \end{aligned}$$

Donc : [1]

$$\begin{aligned} r_n &= \binom{2n-2}{n-1} \cdot 2\frac{(pq)^n}{n} \\ &= \frac{n^2}{2n(2n-1)} \binom{2n}{n} \cdot 2\frac{(pq)^n}{n} \\ &= \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} p^n q^n. \end{aligned}$$

2. a) Si $p = q = \frac{1}{2}$ alors $a_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, par linéarité et comparaison par équivalent, la série $\sum a_{2n}$ diverge. [1]

   b) Comme $p \neq q$, on a $p \neq 1/2$. De plus $pq = p(1-p) = \frac{1}{4} - (p - \frac{1}{2})^2$ et donc $pq < \frac{1}{4}$ puis $4pq < 1$ et $2\sqrt{pq} < 1$, d'où $R > 1$. Donc on a $1 \in [0, R[$ et donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et on a : [1] **SF**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A(1) = \frac{1}{\sqrt{1-4pq}}$$

   Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = G(1) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 1 - \sqrt{(2p-1)^2} = 1 - |2p-1| = 1 - |p-q|.$$

Partie C [/7]

1. a) C est croissante sur $[0, 1[$ (somme de fonctions croissantes ou $C'(x) \geq 0$) et a donc une limite (éventuellement infinie) en 1^-. [1] **SF**

   b) Pour $x \in [0, 1[$, $C(x)$ est la somme d'une série à termes positifs. La suite des sommes partielles de cette série est donc inférieure à la somme. C'est exactement ce que dit la première formule. [1]
   La seconde est formule obtenue en passant à la limite quand $x \longrightarrow 1^-$ dans la première.

   c) Pour tout $x \in [0, 1[$, $0 \leq c_n x^n \leq c_n$, donc en sommant des séries *convergentes*, on obtient la première inégalité. En faisant tendre $x \longrightarrow 1^-$, on a : [1]

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} C(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

En couplant cette inégalité avec la seconde du 1.b, on obtient la formule demandée.

[1] d) La série à termes positive $\sum_{n\geq 0} c_n$ diverge, ses sommes partielles tendent donc vers $+\infty$ (1re formule) et donc, en passant à la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ dans la seconde formule du 1.b, on obtient bien la limite infinie pour $C(x)$.

[1] 2. Utilisons le 1. : $\mathcal{E}$ est récurrent ssi $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge ssi $\lim_{1^-} A = +\infty$.

[1] 3. a) Or, en utilisant les relations déduites de l'équation (2) à la fin de la partie A, $\lim_{1^-} A = +\infty$ ssi $\lim_{1^-} G = 1$ ssi (toujours le 1.) $G(1) = \mathbb{P}(R) = 1$.

[1] b) En observant le B.2, on voit que $\sum a_n$ diverge ssi $p = q = 1/2$.