DS-4
Samedi 12 janvier 2019
durée : 4h

I Cours

1. Énoncer le théorème spectral des endomorphismes symétriques.
2. Donner les coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée.
3. Donner le développement en série entière de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$.

II Algèbre

On considère $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa base canonique $\mathcal{C} = \big(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\big)$.
On note M^T la transposée de la matrice M.
On identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ en écrivant avec une lettre majuscule la colonne correspondant au n-uplet. On aura notamment, pour x, $y \in \mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = X^\mathsf{T} Y$.
De plus si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ a pour matrice relativement à la base canonique la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $y = f(x)$ si et seulement si $Y = AX$.
On dit qu'un endomorphisme symétrique f de E est *positif* si et seulement si pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, $\langle f(x), x \rangle \geq 0$.
On dit qu'un endomorphisme symétrique positif f est un *état* si et seulement si $\mathrm{tr}(f) = 1$.

Partie A Projecteurs sur une droite

Dans cette partie u et v désignent deux vecteurs de norme 1.

1. Justifier, sans vous contenter d'énoncer le résultat du cours, que le projeteur orthogonal sur $\mathrm{vect}\,\{u\}$ est l'endomorphisme p_u de E défini par :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ p_u(x) = \langle x, u \rangle\, u$$

2. Que vaut $\mathrm{tr}\, p_u$?
3. a) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $p_u \circ p_v(x) = \langle u, v \rangle \langle x, v \rangle\, u$.
   b) En déduire $p_u \circ p_v$ lorsque $u \perp v$.
4. Justifier que la matrice Π_U de p_u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est : $\Pi_U = UU^\mathsf{T}$.
5. Soit f un endomorphisme symétrique dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A.
   a) Soient x, y deux vecteurs. Comparer $\langle x, y \rangle$ et $\mathrm{tr}(XY^\mathsf{T})$.

b) Montrer que $\mathrm{tr}(\Pi_U A) = \langle AU, U\rangle$.

c) En déduire la valeur de $\mathrm{tr}(p_u \circ f)$ en fonction de f, u et d'un produit scalaire.

Partie B Endomorphismes symétriques

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E.

a) Justifier l'existence d'une base orthonormée $\mathcal{B} = \big(u_1, \dots, u_n\big)$ et de nombres α_1, ..., α_n tel que :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ f(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle x, u_k\rangle\, u_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_{u_k}(x).$$

b) Que vaut $\mathrm{tr}(f)$?

c) Déterminer, en fonction de la base $\mathcal{B}$ et du vecteur x les nombres λ_1,..., λ_n tels que :

$$\langle f(x), x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda_k^2.$$

d) Justifier que :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ f^2(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \langle x, u_k\rangle\, u_k.$$

2. Soit φ un endomorphisme symétrique de E. Montrer que φ est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

Partie C États

Soit f un état. On utilise dans cette partie la décomposition de f donnée à la question B.1.

On dit qu'un état est *pur* si et seulement si il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $f = p_{u_i}$. C'est-à-dire si et seulement si un seul des nombres α_1, ..., α_n est non nul.

1. Soit w un vecteur de norme 1. On le note $w = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k$.

a) Calculer $\mathrm{tr}(p_w \circ f)$.

b) Montrer que $\mathrm{tr}(p_w \circ f) = 1 \iff \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\mu_k^2 - 1) = 0$.

c) Montrer que f est un état pur si et seulement si $\mathrm{tr}(p_w \circ f) = 1$.

2. Montrer que f est un état pur si et seulement si $\mathrm{tr}(f^2) = 1$.

III Probabilités

Préambule

1 L'expérience

On dispose de deux urnes, U et V, qu'on peut sélectionner aléatoirement avec la probabilité p pour U et q pour V, p et q vérifiant $p+q=1$ et $p \in]0,1[$, et de boules en quantité illimitée.
On considère une suite infinie de sélections indépendantes numérotées 1, 2, 3, ... selon les entiers.
On obtient ainsi une suite σ de U et de V ; par exemple $\sigma = (V, U, V, V, U, V, U, U, \ldots)$.
On dépose dans l'urne sélectionnée une boule supplémentaire. Initialement les deux urnes sont vides ; ainsi, à l'instant n, n boules auront été reparties entre les deux urnes. On dit que $\mathcal{E}$ est réalisé à chaque fois que les deux urnes contiennent le même nombre de boules. Dans la suite σ donnée ci-dessus, $\mathcal{E}$ est réalisé aux instants 2 et 8, etc.

2 Notations

Pour tout n entier naturel non nul, on désigne par A_n et R_n les événements :

- $A_n =$ « $\mathcal{E}$ est réalisé à l'instant n » et
- $R_n =$ « $\mathcal{E}$ est réalisé à l'instant n pour ***la première fois*** ».

On convient que A_0 est l'événement certain et R_0 l'événement impossible.
On note par la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $r_n = \mathbb{P}(R_n)$. On a notamment $a_0 = 1$ et $r_0 = 0$.
On note $A(s)$ la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n s^n$ et $G(s)$ celle de la série entière $\sum_{n\geq 0} r_n s^n$.

3 Résultats essentiels

Probabilité conditionnelle

On admettra le résultat suivant : pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, la probabilité conditionnelle que $\mathcal{E}$ soit réalisé à l'instant $m+n$ sachant que $\mathcal{E}$ est réalisé à l'instant n est égale à la probabilité *a priori* que $\mathcal{E}$ soit réalisé à l'instant m ; c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}(A_{m+n} \mid A_n) = \mathbb{P}(A_m) = a_m, \quad \mathbb{P}(A_{m+n} \mid R_n) = \mathbb{P}(A_m) = a_m \qquad (*)$$

Formule

On rappelle que $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2^{2n}}$$

Partie A Calcul de séries

1. a) Justifier la relation $\mathbb{P}(R_1 \cup \cdots \cup R_n) = \sum_{k=0}^{n} r_k$.

   b) Donner une définition simple[1] des événements $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $R = \bigcup_{n=1}^{+\infty} R_n$. Les comparer[2].

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} R_k$. Justifier successivement que :

   i) La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

   ii) On a : $\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcup_{m=1}^{+\infty} R_m$. $(= R)$

   d) Montrer que $\mathbb{P}(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n$.

   e) Qu'indique l'égalité $\mathbb{P}(R) = 1$?

2. a) Pour n entier tel que $n \geq 1$, justifier la relation $R_n \subset A_n \subset R_1 \cup \cdots \cup R_n$

   b) En déduire à l'aide de la propriété (*) que :

$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j r_{n-j} = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} r_i \tag{1}$$

3. Montrer que les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n s^n$ et $\sum_{n\geq 0} r_n s^n$ on toutes deux un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

4. En utilisant la relation (1) et la question précédente, montrer que pour tout s, réel tel que $0 \leq s < 1$, on a les égalités :

$$A(s) = 1 + A(s)G(s) \tag{2}$$

   On aura donc : $A(s) = \dfrac{1}{1-G(s)}$ et $G(s) = 1 - \dfrac{1}{A(s)}$.

Partie B Des urnes et des boules

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

   b) En utilisant la formule de Stirling, montrer que a_{2n} est équivalent en $+\infty$ à

$$\frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

[1] On veut une phrase en français !

[2] Sont ils égaux, inclus l'un dans l'autre ?

c) Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_{2n}s^{2n}$ a pour rayon de convergence $\rho = \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}$.

d) Montrer que pour tout s réel vérifiant $s \in [0, R[$, on a :

$$A(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}} \text{ et } G(s) = 1 - \sqrt{1-4pqs^2}.$$

e) Déterminer le développement en série entière de $\sqrt{1-x}$ et en déduire que pour tout n, entier naturel, on a : $r_{2n} = \dfrac{1}{2n-1}\dbinom{2n}{n}p^n q^n$.

2. a) Dans le cas où $p = q = \dfrac{1}{2}$, montrer que $\sum_{n\geq 0} a_{2n}$ est divergente.

b) Dans le cas $p \neq q$, montrer que $\rho > 1$ puis que $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente ; déterminer sa somme et en déduire que $r = \sum_{n=1}^{+\infty} r_n = 1 - |p-q|$.

Partie C À faire chez soi : pas dans le DS !

1. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels *positifs* telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n x^n$ soit au moins égal à 1. On notera C la somme de cette série entière.

a) Donner le sens de variations de C sur l'intervalle $[0, 1[$. Justifier que C a une limite (éventuellement infinie) à gauche en 1.

b) Montrer successivement que :

$$\forall x \in [0, 1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \leq C(x),$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} c_k \leq \lim_{x\longrightarrow 1^-} C(x).$$

c) On suppose ici que $\sum_{n\geq 0} c_n$ converge. Montrer successivement que :

$$\forall x \in [0, 1[,\ C(x) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

d) On suppose ici que $\sum_{n\geq 0} c_n$ diverge. Montrer successivement que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k = +\infty,$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} C(x) = +\infty.$$

On dit que $\mathcal{E}$ est *récurrent* si la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.

2. Relier $\lim_{s\longrightarrow 1^-} A(s)$ et la propriété « $\mathcal{E}$ est récurrent ».

3. a) Montrer que $\mathcal{E}$ est récurrent si et seulement si $\mathbb{P}(R) = 1$.

   b) En déduire que $\mathcal{E}$ est récurrent si et seulement si $p = q = 1/2$.