Feuille d'exercices numéro 5
Corrigé et indications

I Suites

1. a) Utiliser l'inégalité de convexité : $|\sin(u)| \leq |u|$. Explorer nI_n.
   b) Faire le changement de variables $u = nt$ et voir...
   c) Ici $n \geq 2$ (sinon pb. en 0^+). Commencer par utiliser le binôme de Newton pour développer $(1 + t/n)^n$ et garder les premiers termes pour avoir :
   $$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \geq 1 + t + \frac{t^2}{4}$$
   Enfin $\varphi(t) = \dfrac{1}{1 + t + \frac{t^2}{4}} \cdot \max(1, t^{-1/2})$ réalise l'hypothèse de domination.
2. Faire le changement de variables $t = x^n$. Ensuite utiliser la suite (g_n) définie par
   $$g_n(t) = \begin{cases} f(t) \cdot t^{-1+1/n} & \text{si } 1 \leq t \leq (1 + 1/n)^n, \\ 0 & \text{si } t > (1 + 1/n)^n \end{cases}$$
3. a) Comparer avec e^{-x}.
   b) Domination : comparer f_n et f_2.
   c) Le changement de variables mène à un équivalent simple. Pour aller plus loin, il faut introduire la fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$: on montrera qu'elle est bien définie sur $[1, +\infty[$ et que $0 \leq F(x) \leq e^{-x}$...

4. a) Suivre l'énoncé ! Attention au problème en 0^+.
   b) On introduira la suite de fonctions définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \ln(t) & \text{si } 0 \leq t \leq n, \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

   Et on observera la suite d'intégrales définies par $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
5. $u_n(x) = \dfrac{(x\ln(x))^n}{n!}$. Il faut pouvoir encadrer $x \longmapsto x\ln x$ sur $]0,1]$
6. $u_n(t) = t^{n+1}(\ln t)^2$.
7. $u_n(x) = xe^{-ax}\left(e^{-bx}\right)^n$.

II Intégrales dépendant d'un paramètre

8. C'est en partie le fil rouge !
9. a) $\mathbb{R}$, paire, $\pi/2$...
   b) Cours ! $f(0) = 0$ (sans calculs : parité !), $f''(0) = -\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \ldots$
   c) f solution de : $xy'' + y' + xy = 0$.
10. Utile pour le 21. Tout d'abord montrer que f est paire et continue sur $\mathbb{R}^*$, puis décomposer en éléments simples pour $x > 0$ et $x \neq 1$ (on se servira de la parité de la fraction rationnelle). On peut ainsi calculer $f(x)$ pour $x \notin \{0, \pm 1\}$, puis utiliser la continuité pour déterminer $f(1)$.
    L'équivalent tombe alors tout seul.
11. Deux façons de procéder, soit faire le changement de variables $u = xt$ soit utiliser les théorèmes ad-hoc.

12. Si on pose $g(x,t) = \cos(xt)e^{-t^2}$, on a $|g(x,t)| \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$. On calcule $f'(x)$ en intégrant par parties en se souvenant que $\varphi'(t) = -2te^{-t^2}$.
13. a) $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ pour la domination.
    b) idem.
    c) Attention, ici il faut se placer sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$...
14. a) $\mathbb{R}$.
    b) F est paire et F croit sur $\mathbb{R}_+$ (sans calcul de dérivée !)
    c) Faire le changement de variables $u = 1/t$ dans le calcul de $F(x)$...
15. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$. Pour utiliser les théorèmes il est préférable de se placer sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Pour les équivalents, essayer le changement de variables $u = xt$.
16. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Remarquer que $t^2 - tx = (t - x/2)^2 - x^2/4$. On peut en déduire un changement de variables et avoir f directement. Sinon cours...
18. $\mathcal{D}_u = \mathcal{D}_v = \mathcal{D}_z = \mathbb{R}$. On peut directement passer au b. et se souvenir que $z(x)$ existe si et seulement si $u(x)$ et $v(x)$ existent...
20. f est paire, on peut donc se limiter à $\mathbb{R}_+$. Attention 0 est un soucis : il va falloir se placer sur $[a, +\infty[$ ($a > 0$) pour la dérivabilité. Pour le comportement en 0 : utiliser la formule des accroissements finis entre 0 et $x > 0$...
21. a) On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ (faux pb en $\pi/2$) Sans dériver ! f est croissante.
    b) Que vaut $\tan(\pi/2 - u)$? S'en servir dans le calcul de $f(1/x)$.
    c) C'est l'occasion de faire un mini-problème...
       i) Faire le changement de variables $u = \tan(t)$.
       ii) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 - 1}$.

iii) En déduire que $f(x) = -x\ln(x) + x + o(x^2)$.

iv) Conclure.

22. a) Le cas $x = 0$ est classique : SF. Pour $x > 0$, on utilise le fait que $|\sin(t)/t| \leq 1$

b) Comme 0 est exclu, on va tenter de travailler sur $[a, +\infty[$ ou $[a, b]$ (avec $0 < a < b$). Domination : $\varphi(t) = e^{-at}$.
On introduit la suite G_n définie par $G_n(x)$ est la fonction qu'on devrait obtenir si on dérivait n fois. Puis montrer que pour tout n, G_n est $\mathcal{C}^1$ et que $G'_n = G_{n+1}$.

c) On utilise la majoration du a) qui donne $|F(x)| \leq 1/x$.

d) Voir b. puis se souvenir que $\sin(t) = \Im m(e^{it})$.

e) On a $F(x)$ est une primitive de F' et on connaît $\lim\limits_{+\infty} F$...

23. Une variante possible est : E est l'espace vectoriel tes fonctions f telles qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ (dépendant de f) tel que $f(x) \underset{+\infty}{=} O(x^m)$ (ou, autre variante, $o(x^m)$).

a) On pose $g(x,t) = e^{-xt}f(t)$. On a $|g(x,t)| \leq e^{-xt} \cdot M$, où M majore $|f(t)l$.

b) Pour tout $k, \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t) = (-1)^k t^k g(x,t)$. Sur le segment $[a,b]$ $(0 < a < b)$ la dominante de la dérivée partielle est $t \longmapsto t^k e^{-at}$. On applique alors le théorème ad-hoc pour montrer que F est $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

c) On prend la majoration du a) pour obtenir $|F(x)| \leq 1/x$.

d) ON sait que $|sin(t)| \leq |t|$ sur $\mathbb{R}$. On calcule $F'(x)$ comme dans le 22.d) et on conclut de la même façon qu'au e).

24. a) i) Classique : forme indéterminée 1^∞...

ii) Fonction auxiliaire (différence de logarithmes)

b) Riemann.

c) i) Deux problèmes. Riemann.

ii) Faire le calcul et se souvenir de la convergence dominée.

d)i) $u_1 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. On doit décomposer en éléments simples, en utilisant sa parité la fraction rationnelle.

ii) Intégration par parties $f'(t) = t^2$, $g(t) = \dots$; $t^4 = 1 + t^4 - 1\dots$

iii) Théorème spécial des séries alternées. Calculer une somme partielle et conclure...