

Feuille d'exercices numéro 2

Espaces vectoriels, endomorphismes

I Petits exercices

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = f^2 + 2f$. Soient $E_1 = \text{Ker } f$, $E_2 = \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $E_3 = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.
 - a) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.
 - b) Soient p_1 le projecteur sur E_1 parallèlement à $E_2 + E_3$, p_2 le projecteur sur E_2 parallèlement à $E_1 + E_3$ et p_3 le projecteur sur E_3 parallèlement à $E_1 + E_2$. Exprimer f à l'aide de p_1 , p_2 et p_3 .
 - c) En déduire qu'il existe trois suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n p_1 + b_n p_2 + c_n p_3.$$

- d) Montrer qu'il existe trois suites $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a'_n \text{Id} + b'_n f + c'_n f^2$$

et les calculer.

2. Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, on considère les vecteurs $a_1 = (1, 3, -1)$ et $a_2 = (2, -4, 0)$. Montrez que la famille $\{a_1, a_2\}$ est libre et déterminez une équation du plan P engendré par ces vecteurs.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- a) Montrer que AB est la matrice d'un projecteur. Déterminez $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(B)$.
 b) Montrez que $BA = I_2$.
4. (Centrale 2001) Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4, $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ait une des deux formes ci après :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et que ces deux cas s'excluent.

5. (CCP 2001) soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$.
 a) Trouver une condition suffisante et nécessaire pour que l'endomorphisme $e + hf$ soit inversible avec $h \in \mathbb{R}$ et e l'identité de E .
 b) Calculer alors cet inverse.
6. (CCP 2001) Montrer que toute forme linéaire f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut se mettre sous la forme $f(X) = \text{tr}(MX)$ avec M une matrice convenablement choisie.
7. (INT 2001) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, f, g des endomorphismes de E tels que $f \circ g = 0$ et $f + g \in \mathcal{GL}(E)$. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = \dim(E)$.
8. Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel de dimension finie E tels que $p \circ q = 0$. Montrez que $f = p + q - q \circ p$ est également un projecteur de E et qu'il est tel que $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$.

9. (CCP 2002) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension n .
- a) Montrer que si f est un projecteur alors $\text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f) = E$.
- b) Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\text{rg}(f) + \text{rg}(f - \text{Id}) = n$.
10. (CCP 2002) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E . on suppose que $E = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.
11. (Centrale 2003) Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -\text{Id}$.
- a) Montrer que si $\{x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_{p-1})\}$ est une famille libre alors la famille

$$\{x_1, \dots, x_p, f(x_1), \dots, f(x_{p-1}), f(x_p)\}$$

est aussi une famille libre de E .

- b) Montrer que : $(\exists f \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } f^2 = -\text{Id}) \iff (n \text{ est pair})$.
- c) Soit $A \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_{2p}$ Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.
12. (Centrale 2003, CCP 2008) Soient E et F deux espaces vectoriels et soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$ et $F = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(f)$.
13. (Centrale 2004) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie paire $n = 2p$ et soit f un endomorphisme de E . Montrer

l'équivalence des trois propriétés suivantes :

$$(a) \quad f^2 = 0 \text{ et } \operatorname{rg}(f) = p$$

$$(b) \quad \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)$$

$$(c) \quad \text{il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ telle que } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_p & I_p \\ 0_p & 0_p \end{pmatrix}$$

14. (CCP 2004) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère les quatre propositions suivantes :

$$(a) \quad E = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(f)$$

$$(b) \quad \operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$$

$$(c) \quad E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$$

$$(d) \quad \operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$$

a) Montrer que (a) et (b) sont équivalentes.

b) Montrer que si E est de dimension finie alors les quatre propositions sont équivalentes.

15. (Mines 2004) Soient n réels $0 \leq a_1 < \dots < a_n$. Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on pose $f_k(x) = \frac{1}{x^2 + a_k^2}$. Cette famille est-elle libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

16. (École de l'Air 2004) Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists p \in \mathbb{N}^*, \quad u^p(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^n = 0$. Ce résultat reste-t-il vrai en dimension infinie ? Si non fournir un contre-exemple.

17. (CCP 2005) E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

- a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\{x, f(x), \dots, f^{p-1}(x)\}$ soit une famille libre de E . Que peut-on en déduire pour n et p ?
- b) Application : $\dim(E) = 2$, $f \in \mathcal{L}(E)$; montrer que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$ est impossible.
18. (CCP 2003) Montrer que $G = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = P(0)\}$ est un espace vectoriel et trouver sa dimension.
19. Soient $f_0, f_1, \dots, f_n$ ($n+1$) formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$ définies par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f_i(P) = P(b_i)$ où les b_i ($0 \leq i \leq n$) sont des réels donnés.
- a) Prouvez l'équivalence : $(f_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est libre si et seulement si les réels $b_0, b_1, \dots, b_n$ sont deux à deux distincts.
- b) Dans ce cas soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Prouvez qu'il existe un unique $(n+1)$ -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 f(x)P(x) \, dx = \sum_{i=0}^n a_i P(b_i).$$

20. (CCP 2004) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . On suppose qu'il existe deux réels non nuls et distincts a et b vérifiant $(u - a \operatorname{Id}) \circ (u - b \operatorname{Id}) = 0$. Soient $p = \frac{1}{b-a}(u - a \operatorname{Id})$ et $q = \frac{1}{a-b}(u - b \operatorname{Id})$.
- a) Calculer $p + q$, $p \circ p$, $p \circ q$, $q \circ q$ et $q \circ p$.
- b) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}(q)$.
- c) Trouver les éléments propres de u . u est-il diagonalisable ?

II Escp 2009 – 2.11

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. On considère la matrice J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe α pour lequel :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \alpha = \sum_{k=1}^n a_{i,k} = \sum_{k=1}^n a_{k,j}$$

1. Montrer $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Montrer que l'application d définie sur $\mathcal{C}$ à valeurs réelles par :

$$d(A) = \sum_{k=1}^n a_{1,k}$$

est une application linéaire surjective non injective.

3. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $AJ = JA = \lambda J$.
 b) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{C}$. Montrer que AB appartient à $\mathcal{C}$ et calculer $d(AB)$.
 c) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}$. Montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{C}$ et trouver une relation entre $d(A)$ et $d(A^{-1})$.
4. Montrer que $\text{Ker}(d)$ et $\text{vect}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{C}$.
5. Soit $(r, s) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$. On note $A_{r,s}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$ et $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$.
 Démontrer que la famille $(A_{r,s})_{(r,s) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2}$ forme une base de $\text{Ker}(d)$ et en déduire la dimension de $\mathcal{C}$.
6. Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{C}$.
 Montrer que $B = \frac{d(A)}{n} J$ est solution de l'équation :

$$A^p - B^p = (A - B)^p.$$

III Polynômes de Lagrange

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E = \mathbb{K}_n[X]$ et on suppose que $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont $n + 1$ éléments *distincts* de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que l'application Φ définie pour tout $P \in E$ par $\Phi(P) = (P(a_0), \dots, P(a_n)) \in \mathbb{K}^{n+1}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Dorénavant, on pose pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i = \prod_{k \neq i} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.

2. Déterminer $L_i(a_j)$. On distinguera les cas $i = j$ et $i \neq j$.
3. a) On pose $Q = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$. Déterminer $Q(a_i)$ (attention aux indices *muets*).
 b) Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre. En déduire qu'il s'agit d'une base de E .
 c) Montrer que pour tout $P \in E$, $P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$.
4. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $P \in E$, on pose $\varphi_i(P) = P(a_i)$.
 a) Justifier que φ_i est une forme linéaire sur E .
 b) Montrer que la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.