

Feuille d'exercices numéro 12

Équations différentielles

I Premier ordre

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
 - a) $(1 + x^2) \cdot \arctan(x) \cdot y' - y = x^2 - 2x \cdot (1 + x^2) \cdot \arctan(x)$.
 - b) (CCP 2004) Résoudre $x^2 \cos(x)y' - x^2 \sin(x)y + 1 = 0$.
2. (CCP 2004) soit $(E) : xy'(x) + 2y(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.
 - a) Donner les solutions de (E) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0.
 - b) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qu'on notera f .
 - c) Calculer $\int_0^1 f(t) dt$.
3. (CCP 2004) Résoudre l'équation différentielle

$$y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = 2x.$$

4. (Centrale 2003) Résoudre l'équation différentielle :

$$(1 - t^2)g'(t) - tg(t) = 2t\sqrt{1 - t^2}.$$

5. Soit $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable.
Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
6. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.
On étudie l'équation différentielle

$$y' + \alpha y = \varphi(t) \quad (\text{E})$$

- a) Soit f une solution de (E). On note g la fonction définie par $g(t) = f(t + T)$. Montrer que g est aussi une solution de (E).
- b) En déduire qu'une solution f de (E) est T -périodique si, et seulement si, $f(0) = f(T)$.
- c) Montrer que l'équation (E) admet une unique solution T -périodique, sauf pour des valeurs exceptionnelles de α que l'on précisera.

7. On considère l'équation

$$(1 - x)y' - y = g \quad (\text{E})$$

où $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est donnée.

- a) Résoudre l'équation homogène associée.
- b) On suppose que la fonction g est développable en série entière

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

de rayon de convergence $R \geq 1$.

Montrer que (E) admet au moins une solution développable en série entière en 0,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence $R' \geq 1$ et exprimer les a_n en fonction de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II Second ordre

8. Résoudre les équations différentielles suivantes :
- a) $y'' - 2y' + y = e^{|x|}$. Existe-t-il des solutions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

b) $y'' + y' - 2y = (x+1)\operatorname{ch}(x)$ et $y'' + y' - 2y = (x+1)\operatorname{sh}(x)$.

9. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

- a) Montrez que la fonction $\varphi : x \mapsto x/(1-x)$ est solution de (E) .
- b) On pose $y = z \cdot \varphi(x)$. Déterminez l'équation différentielle (E') vérifiée par z .
- c) Intégrez l'équation différentielle (E') . Déduisez-en l'ensemble des solutions de (E) en indiquant soigneusement les intervalles de définition.
- d) Existe-t-il un solution de (E) , non identiquement nulle et définie sur $] -\infty, 1[$, sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}$?
10. (CCP 2004) Résoudre $y'' + 4y = \cos(2x)$
11. (CCP 2004) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = x^2 + e^x$$

12. (TPE 2006 totalement revu) Soit a une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + a(t)y = 0.$$

- a) Soient u et v deux solutions de (E) . On pose $W = uv' - u'v$. Montrer que W est une constante.
- b)i) Soit u une solution bornée de (E) . Montrer que u' a une limite en $+\infty$ (On pourra se servir de l'écriture de u' à l'aide de u''). Montrer que cette limite est 0.

- ii) Soit v une autre solution bornée de (E) . Montrer que la fonction W définie au a) est nulle.
 - iii) En déduire successivement que $d = u(0)v - v(0)u$ est la fonction nulle puis que u et v sont colinéaires.
 - iv) Montrer qu'il existe des solutions non bornées de (E) .
13. Soient p une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs *négligables* et l'équation différentielle :

$$y'' + py = 0 \quad (E)$$

On se propose de montrer que toute solution non nulle de (E) possède au plus un zéro.

- a) Soit f une solution non nulle de (E) . On suppose que f s'annule en x_0 . Montrer que $f'(x_0) \neq 0$; en déduire l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}, \quad f(x) \neq 0.$$

- b) On suppose que f s'annule sur $]x_0, +\infty[$.

- i) Montrer que f possède, dans l'intervalle précédent, un plus petit zéro, que l'on note x_1 .
- ii) Supposons, par exemple $f > 0$ sur $]x_0, x_1[$. Déterminer les signes de $f'(x_0)$ et $f'(x_1)$. En déduire une contradiction.

- c) Conclure.

14. Soient p_1 et p_2 deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $p_1 \leq p_2$ sur I . On considère les deux équations différentielles :

$$y'' + p_1 y = 0 \quad (E_1)$$

$$y'' + p_2 y = 0 \quad (E_2)$$

- a) Montrer que tout zéro a d'une solution non nulle y d'une de ces équations est isolé, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in]a - \alpha, a + \alpha[\setminus \{a\}, \quad y(x) \neq 0.$$

- b) Soit y_1 une solution non nulle de (E_1) et soit y_2 une solution de (E_2) . Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 (s'ils existent), il y a un zéro de y_2 . On pourra utiliser la fonction $w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.
- c) Soient y_1 et z_1 deux solutions non liées de (E_1) . Montrer que y_1 et z_1 n'ont pas de zéro commun et qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 (s'ils existent), il y a un zéro de z_1 .

15. Soit l'équation différentielle

$$y'' + e^x y = 0 \tag{E}$$

Montrer que toute solution de (E) s'annule sur tout intervalle de longueur π inclus dans $\mathbb{R}_+$. On pourra utiliser $y'' + y = 0$.

16. (TPE 2006) Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et ω un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + \omega^2 y = f.$$

- a) Montrer que la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{\omega} \int_0^x \sin(\omega(x-t)) f(t) dt$$

est solution de (E) .

- b) Résoudre (E) .

17. Résoudre : $\cos(x) \cdot y'' + \sin(x) \cdot y' = \cos^3(x) \cdot y$. Indication : effectuer le changement de variables $u = \sin(x)$.

18. Résoudre $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$.

19. (CCP 2000) Résoudre $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^x$.

20. (CCP 2001, prolongement de 13) Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. soit $(E) : y'' + y = f$.
- a) Montrer que toute solution de (E) est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
- b) Montrer qu'il existe une unique solution de (E) ayant une limite finie en $+\infty$.
21. Résoudre l'équation différentielle : $(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 2$.
22. (CCP 2003) Résoudre $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-t}}{t}$.
23. Résoudre l'équation $x^2y'' + xy' - y = 2x$. On ne demande pas le recollement des solutions.
24. Résoudre l'équation différentielle $(t+1)x'' - x' - xt = 0$ sachant que la fonction $t \mapsto e^t$ est solution.
25. Soit f une application continue et bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 2y = f(x)$$

sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

26. (CCP 2001) Résoudre l'équation :

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (x^2 + x)e^x + x^2 + x + 1$$

Donner l'allure des solutions.

27. (CCP 2001) Résoudre $y'' - 4y = a|x| + b$. Montrer qu'il existe une unique solution pour laquelle la courbe admet des droites asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.
28. (Mines 2001) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, $xy'' - y' + 4x^3y = 0$ (on pourra utiliser le changement de variables $x^2 = t$).
29. Soit $a \in \mathbb{R}$ et y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$y'' + |y| = 0, \quad y(0) = a, \quad y'(0) = 0.$$

- a) Montrer que $y \leq a$.

- b) Déterminer y si $a \leq 0$.
- c) On suppose $a > 0$. Montrer que y a exactement deux zéros $\alpha < 0 < \beta$. Déterminer y .

III Inclassables

30. (CCP 2003) Résoudre $f'(x) + f(-x) = e^x$.
31. (CCP 2004) Résoudre $\int_0^x f(t) dt = 1 + f'(x)$.
32. (Centrale 2004, même thème que 27) Résoudre l'équation différentielle $(E) : f''(x) + f(-x) = -x + \cos(x)$.

IV Systèmes différentiels

33. (CCP 2000) Soit

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 2 & 10 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- a) Trouvez des vecteurs V_1, V_2 et V_3 tels que $AV_1 = V_1$, $AV_2 = 4V_2$ et $AV_3 = 4V_3 + V_2$. Montrez que la famille (V_1, V_2, V_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- b) A étant la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique, trouvez la matrice J de u dans la base (V_1, V_2, V_3) .
- c) Résoudre $dY/dt = JY$.
- d) Résoudre $dX/dt = AX$.
34. (TPE 1998) Soit n un entier pair. Résoudre le système différentiel $x'_1 = kx_1 + x_n$, $x'_2 = kx_2 + x_{n-1}$, $\dots$, $x'_n = kx_n + x_1$

35. Soit

$$(S) \quad \begin{cases} x' = -x - 2y - z \\ y' = -2x - 3y - 3z \\ z' = x + 3y + 2z \end{cases}$$

Soit $t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une solution de (S).

- a) Déterminez une condition sur $M(0)$ pour que $M(t)$ ait une limite à distance finie quand $t \rightarrow +\infty$.
- b) Déterminez une condition sur $M(0)$ pour que $t \mapsto M(t)$ soit périodique.

36. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- a) Montrez que A et B sont semblables.
- b) Résoudre le système

$$\begin{cases} x' = -4x + y + z \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$$

37. (CCP 2001) Résoudre le système

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ y' = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}y \end{cases}$$

38. (CCP 2001) Résoudre $X' = AX$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

39. Résoudre le système

$$\begin{cases} x'' = -4x - 3y \\ y'' = -8x - 2y \end{cases}$$