

Feuille d'exercices numéro 1

Indications et corrigé partiels

1. La fonction est positive, donc « intégrable = l'intégrale $\int_0^1$ converge ». Deux problèmes :
 - Faux problème en 0 ;
 - Équivalent en $+\infty$: $\frac{\pi}{4x \ln(x)}$. Non intégrable sur $[1, +\infty[$...
2. La fonction (notée f) est positive, donc « intégrable = l'intégrale $\int_0^1$ converge ». Deux problèmes :
 - En 0 : $f(x) \sim -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$. $x^{3/4}f(x) \rightarrow 0$ permet de conclure sur $]0, 1/2]$.
 - En 1 : $f(x) \sim \frac{1}{(1-t)^{1/2}}$. Les exemples de Riemann permettent de conclure.
3. On a :

$$\frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$$

Puis on intègre par parties en dérivant le logarithme, on effectue le changement de variables et on conclut en obtenant :

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx = -2\pi.$$

4. a) La fonction f_n est positive. Un seul problème : en 0^+ . Pour $n \geq 1$, ce problème est un faux problème. Pour $n = 0$, on a : $-\sqrt{t} \ln(t^2) \rightarrow 0$...

b) On intègre par parties (attention au problème) :

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^1 f_n(t) dt &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln^2(t) \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \cdot 2 \frac{\ln(t)}{t} dt \\ &= \dots \\ &= -\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \ln^2(\varepsilon) + 2 \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2} \ln(\varepsilon) + 2 \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{(n+1)^3}\end{aligned}$$

$$\text{D'où } u_n = \frac{2}{(n+1)^3}.$$

c) On vérifie que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t} dt$ converge bien...

d) On a ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \neq -1$:

$$\sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 + t}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t} dt + (-1)^n \underbrace{\int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln^2(t)}{1+t} dt}_{R_n}$$

On a clairement $0 \leq R_n \leq u_{n+1}$ et donc $R_n \rightarrow 0$. Ce qui donne :

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^3} = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^3 \dots$$

5. SAVOIR FAIRE ! On a :

$$\int \frac{dt}{t \ln(t)} = \ln(\ln(t)) + K$$

$$\int \frac{dt}{t \ln(t) \ln(\ln(t))} = \ln(\ln(\ln(t))) + K$$

Les deux fonctions de sont donc pas intégrables.

7. a) on a $\int \text{th}(x) dx = \ln(\text{ch}(x)) + K$. Donc $V_m(\text{th}) = 1$.
 b) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $V_m(f) = 0$.
 c) Dans ce cas $V_m(f) = a$: utiliser la définition de limite...
8. Le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$. La nature de l'intégrale est alors la même que celle de $\int_0^1 \ln(t) dt$ (pourquoi?).
9. On intègre par parties sur $[a, b]$ et on finit par obtenir :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^3} dx = -\frac{1}{2}.$$
10. a) $\arcsin(u) \underset{0}{=} u + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$.
 b) Le changement de variables est $u = 1/x$...
 c) On intègre par parties quoi qu'il arrive!
11. a) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$ et ne change de signe qu'en 0.
 Comme $g(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{te^{\sqrt{t}}}$, on a $t^2 g(t) \rightarrow 0$ et donc, pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} g(t) dt$ converge. On a donc immédiatement $\mathbb{R}_+^* \subset \mathcal{D}_f$.

Au voisinage de 0^+ : $g(x) \underset{0}{\sim} t^{-3/2}$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ diverge : $0 \notin \mathcal{D}_f$.

Pour $x < 0$, $\int_x^{+\infty} g(t) dt$ contient le problème 0^+ vu ci-dessus ; cette intégrale est donc divergente.

Finalement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

b) On a, pour $x \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned} 0 \leq x f(x) &= x \int_x^1 g(t) dt + x \int_1^{+\infty} g(t) dt \\ &\leq x \int_x^1 t^{-3/2} dt + x f(1) \\ &\leq x \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 2 \right) + x f(1) \dots \end{aligned}$$

c) En utilisant un principe similaire, on a :

$$x^{3/4} f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Donc $\int_0^1 f(x) dx$ converge.

Pour le problème en $+\infty$ c'est un peu plus délicat. On commence par montrer qu'il existe $M > 0$ tel que si $t \geq M$, $e^{\sqrt{t}} - 1 \geq t^2$. Ensuite, on voit que si $x \geq M$,

$$0 \leq f(x) \leq \int_x^{+\infty} t^{-3} dt = \frac{1}{2x^2}$$

Et donc $\int_M^{+\infty} f(x) dx$ converge...

12. a) La fonction définie par $f_x(t) = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = \frac{e^{-xt}}{t} (e^{(x-1)t} - 1)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est de signe constant égal à celui de $x - 1$.

On a deux problèmes :

- En 0^+ : faux problème...
- En $+\infty$, on a deux cas selon que $x > 0$ (l'intégrale converge) ou $x \leq 0$ (l'intégrale diverge)

On a donc $\mathcal{D}_I = \mathbb{R}_+^*$.

Remarque : en utilisant une idée de l'exercice suivant, on peut découper :

$$I(x) = \int_0^1 f_x(t) dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$$

et remarquer que la deuxième intégrale est un cas particulier de la troisième...

b) Observons :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt &= \int_a^b \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{xa}^{xb} \frac{e^{-t} - e^{-s}}{s} ds \quad (s = xt) \\ &= \int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^b \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^{xb} \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

Quand $b \rightarrow +\infty$, les deux intégrales $\int_1^b \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\int_1^{xb} \frac{e^{-t}}{t} dt$ tendent vers la même valeur : $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$

Par contre :

$$\begin{aligned} \int_a^{xa} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \int_a^{xa} \frac{dt}{t} + \int_a^{xa} \frac{e^{-t} - 1}{t} dt \\ &= \ln(x) + \int_a^{ax} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

Comme la fonction φ est définie, continue sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle peut être prolongée par continuité en 0 en posant $\varphi(0) =$

−1, on a :

$$\int_a^{ax} \varphi(t) dt \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0.$$

En rassemblant les morceaux, on a donc :

$$I(x) = \ln(x)$$

REMARQUE : Le cours sur les intégrales dépendant d'un paramètre permettra d'arriver au même résultat bien plus vite !

19. La fonction P est bornée sur le segment $[a, b]$. Soit alors M tel que sur $[a, b]$, $|P| \leq M$. On a alors, sur l'intervalle ouvert $|P \times \omega| \leq M \times |\omega|$.

Comme ω est intégrable sur $]a, b[$, $|\omega|$ l'est aussi etc.

20. a) Convergence. $I_a = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. il faut décomposer¹ :

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

b) Convergence (deux faux problèmes). Valeur ?

c) Attention au signe (il change en 1) ! En fait $\int_0^{+\infty} \dots$: converge. Utiliser la règle de Riemann avec $\sqrt{x}$ en 0^+ et $x^{3/2}$ en $+\infty$.

Faire le changement de variables $y = 1/x$ pour avoir $I_c = 0$.

d) Convergence (Riemann !) Pour le calcul utiliser

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + x - 4x^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

¹Identité remarquable À CONNAÎTRE : $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

On a alors :

$$\frac{1}{x^4 + 4} = \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 2} + \frac{cx + d}{x^2 - 2x + 2}$$

Les constantes se déterminent en utilisant la parité (donne $a = -c$ et $b = d$), puis en prenant deux valeurs (simples par ex 0 et 1)

On trouve finalement $I_d = \frac{\pi}{8}$.

- e) On commence par faire le changement de variables $u = t^4$, puis à l'aide de Riemann on détermine la convergence et, enfin on calcule à l'aide d'une intégration par parties pour trouver : $I_e = -\frac{1}{32}$

21. Les fonctions sont de la forme $F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt$. Pour trouver le domaine de définition, il faut chercher quand est ce que le segment de bornes $a(x)$ et $b(x)$ est inclus dans un intervalle où f est définie et continue par morceaux ou alors quand est ce que f est intégrable sur $]a(x), b(x)[\dots$

a) $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}_+$. $F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x} > 0$

b) $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. $F'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$. En utilisant :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} + \int_x^{x^2} \underbrace{\left(\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} \right)}_{\varphi(t)} dt$$

et en remarquant qu'en posant $\varphi(1) = \frac{1}{2}$ on obtient une fonction continue sur $]0, +\infty[$, on voit que f a une limite en 1 qui vaut $\ln(2)\dots$

c) $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$. $F'(x) = 3f(3x) - f(x) = \frac{e^{3x} - e^x}{x} > 0$.

d) $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}^*$. $F'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}$: extrema en $x = \pm\sqrt{2}$. En utilisant la même méthode qu'à la question précédente ($f(x) = \frac{1}{x^2} + \psi(x)\dots$), on voit que F a pour limite $+\infty$ en 0^+ (en fait on a un développement « limité »). Un encadrement brutal de l'intégrale donne aussi un équivalent en $+\infty$: $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2\ln(x)} \dots$

e) $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$ et F est $\mathcal{C}^1$. La fonction F vérifie :

$$F(x + \pi) = F(\pi - x) = F(x)$$

Donc on peut se limiter à $[0, \pi/2]$. On a alors :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2\sin(x)\cos(x)\arccos(|\cos(x)|) \\ &\quad + 2\sin(x)\cos(x)\arcsin(|\sin(x)|). \\ &= 0 \end{aligned}$$

car quand $x \in [0, \pi/2]$, on a $\sin(x) \geq 0$ et $\cos(x) \geq 0$ et donc $|\cos(x)| = \cos(x)$ etc.