

Feuille d'exercices numéro 1

Intégration

1. La fonction $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x \ln(2+x^2)}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Montrez que la fonction $t \mapsto -\frac{\ln(t)}{\sqrt{t} \cdot (1-t)^{3/2}}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
3. (CCP 2005, variante de 2) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}$ est-elle intégrable sur $]0, 1[$? Si oui, calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}} dx.$$

On pourra commencer par calculer la dérivée de $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, puis faire le changement de variables $t = \sqrt{x}$...

4. Montrez que pour tout entier naturel n la fonction

$$f_n : t \mapsto t^n \ln^2(t)$$

est intégrable sur $]0, 1]$ et calculez son intégrale u_n en fonction de n . En déduire une expression de $\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t} dt$ sous forme d'une somme de série.

5. Étudiez l'intégrabilité sur $[3, +\infty[$ des fonctions $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$ et $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t) \ln(\ln(t))}$.

6. Trouvez un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{n+t} dt$
7. (CCP 2001) On définit la valeur moyenne d'une fonction par

$$V_m(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

- a) Calculer $V_m(\ln)$.
- b) Si f est intégrable sur $[0, +\infty[$, que vaut $V_m(f)$
- c) On suppose $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = a$. Que vaut alors $V_m(f)$?
8. (CCP 2001) Nature de $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2 + \cos(t)} dt$.
9. Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^3} dx$ et la calculer.
10. (CCP 2002) Soit $I = \int_1^{+\infty} \left(\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right) dx$.
- a) Justifier l'existence de I .
- b) Calculer I par un changement de variable acceptable.
- c) Calculer I par une intégration par parties. Quelle remarque peut-on faire ?
11. (CCP 2002) Domaine de définition de

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t(e^{\sqrt{t}} - 1)} dt.$$

Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 0$ (on pourra utiliser $e^{\sqrt{t}} - 1 \geq \sqrt{t}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$). La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

12. (Mines 2003) Donner le domaine de définition de

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt$$

et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

13. (ENSTIM 2009, variation du précédent)

a) Existence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

b) Existence et calcul explicite de $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

14. (CCP 2003) Existence pour $n \in \mathbb{N}$ de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^n} dt$ et de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1-t^2} dt.$$

15. Nature et calcul de $\int_1^{+\infty} \frac{a(x)}{x^2} dx$ où $a(x)$ est la partie fractionnaire du réel x (i.e. $a(x) = x - E(x)$).

16. On considère la fonction définie par une intégrale :

$$f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)t^x}.$$

a) Donner le domaine de définition de f . Montrer que f est monotone.

b) Établir une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

17. Soit f une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ et admettant une limite ℓ quand $x \rightarrow +\infty$.

a) Montrer que pour tout réel a , l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (f(t+a) - f(t)) dt$$

converge. Exprimer cette intégrale en fonction d'une intégrale définie et de ℓ .

b) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x)) dt$

18. Montrer l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge absolument où P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.
19. (Variante du précédent) Soit ω une fonction continue par morceaux et intégrable sur $I =]a, b[$ ($a < b$). Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$, la fonction $P \times \omega$ est intégrable sur I .
20. Étudier la nature et calculer le cas échéant les intégrales suivantes :
- a) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.
 - b) $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.
 - c) $\int_{1/a}^a \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$.
 - d) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+4}$.
 - e) $\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \ln(t)}{(1+t^4)^3} dt$.
21. Étudier les fonction suivantes définies par des intégrales.
- a) $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$.
 - b) $F : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$.
 - c) $F : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{e^t}{t} dt$.
 - d) $F : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.
 - e) $F : x \mapsto \int_0^{\cos^2(x)} \arccos(\sqrt{t}) dt + \int_0^{\sin^2(x)} \arcsin(\sqrt{t}) dt$.