

# Feuille d'exercices numéro 8

## Orthogonalité

### I Espaces préhilbertiens

1.  $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} f(t)g(t) dt$ . Montrez que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soit  $B$  l'ensemble des suites à termes réels bornées.
  - a) Montrez que l'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (u, v) \in B^2 \longmapsto \langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$$

est un produit scalaire sur  $B$  (vous commencerez par montrer qu'elle est bien définie, c'est-à-dire que  $\langle u, v \rangle$  a bien un sens).

- b) Soit  $F$  le sous-espace vectoriel des suite nulles à partir d'un certain rang. Calculez  $F^\perp$ . Déduisez-en que  $F$  n'a pas de supplémentaire orthogonal.
3. (CCP 2000) Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels (distincts ou non). Pour  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ , on pose

$$\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k).$$

- a) Montrez que  $\varphi$  est un produit scalaire.
  - b) Montrez qu'il existe une unique base  $(P_0, \dots, P_n)$  telle que  $P_k$  soit de degré  $k$  et de coefficient dominant positif.

- c) Calculez les polynômes  $P_k$  pour  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = a$ .
4. L'espace vectoriel  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est muni du produit scalaire canonique  $(A, B) = \text{tr}(A^\top \cdot B)$ .
- a) Soit  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques de  $E$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  celui des matrices antisymétriques. Montrez que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux de  $E$ .
- b) Calculez la distance de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  à  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .
5.  $E = \mathbb{R}_2[X]$ ,  $\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$ .
- a) Montrez que  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace euclidien.
- b) Trouvez une base orthonormée  $(P_0, P_1, P_2)$  telle que pour tout  $k$ ,  $d^\circ(P_k) = k$ .
6. (CCP 2002) soit  $A$  une matrice symétrique réelle, définie positive, et soit  $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ . On pose

$$\varphi(x, y) = -\det \left( \begin{array}{c|ccc} 0 & y_1 & \cdots & y_n \\ \hline x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_n & & & \end{array} \right)$$

Montrez que  $\varphi$  est un produit scalaire.

7. (CCP 2005) Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E = \mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soient  $v_1, \dots, v_p$  des vecteurs de  $E$ . On note  $V = \{v_1, \dots, v_p\}$ . On pose  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  avec  $m_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$  et on appelle  $H$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des  $v_k$  exprimées dans la base  $\mathcal{B}$ .
- a) Montrer que  $M = H^\top \cdot H$ .
- b) Montrer que  $M$  et  $H$  ont même noyau, puis que  $\text{rg}(M) = \text{rg}(H)$ .

- c) En déduire que  $\text{rg}(V) = \text{rg}(M)$ .
8. (TPE 2005) Comparer  $\text{Ker}(A^\top A)$  et  $\text{Ker}(A)$  d'une part et  $\text{Im}(A^\top A)$  et  $\text{Im}(A)$  d'autre part.
9. (CCP 2005) Soit

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - t = 2x - z + t = 0\}.$$

- a) Montrer que  $E$  est un espace vectoriel. Trouver une famille génératrice puis une base de  $E$ .
- b) Si  $\mathbb{R}^4$  est muni du produit scalaire usuel, déterminer une base orthogonale de  $E$ .

## II Espaces euclidiens, projecteurs orthogonaux

10. Soit  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$ . Soit  $f : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sum_{k=1}^n (y_k - ax_k - b)^2$ .
- a) Exprimez  $f(a, b)$  à l'aide de la norme euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Montrez que  $f(a, b)$  a un minimum en un unique point  $(a_0, b_0)$  que vous déterminerez.
11. Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  de matrice relativement aux bases canoniques  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On pose  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et on munit  $\mathbb{R}^3$  du produit scalaire canonique. Déterminer  $u \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\|b - f(u)\|$  soit minimal.
12. Soit  $E$  un espace euclidien et  $p, q$  deux projecteurs orthogonaux de  $E$ . Montrer que les quatre propriétés suivantes sont

équivalentes :

- (1)  $(q - p)$  est un projecteur orthogonal
- (2)  $\forall x \in E, \langle (q - p)(x), x \rangle \geq 0$
- (3)  $\text{Im } p \subset \text{Im } q$
- (4)  $q \circ p = p$ .

13. (CCP 2004) Soit  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$  rapporté à la base orthonormée  $\mathcal{B}_0 = (u_1, \dots, u_n)$ . Soit  $H$  l'hyperplan de  $E$  d'équation  $\sum_{k=1}^n x_k = 0$  dans la base  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}$  la famille de vecteurs  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  définie par  $e_k = u_1 - u_{k+1}$ .
- a) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $H$ .
  - b) Construire une base orthonormée de  $H$  à partir de  $\mathcal{B}$ .
  - c) Déterminer la projection orthogonale de  $u_n$  sur  $H$ .
  - d) Retrouver ce résultat à l'aide de la projection orthogonale de  $u_n$  sur  $H^\perp$ .
14. (CCP 2002) Soit  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  soit  $F$  l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^4$  dont les coordonnées vérifient

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

- a) Déterminer une base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$  de  $F$ .
  - b) Donner la matrice  $A$  de la projection orthogonale  $p$  sur  $F$ .
  - c) Soit  $\{v_3, v_4\}$  une base de  $F^\perp$  et  $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Déterminer la matrice  $B$  de  $p$  dans  $\mathcal{B}'$ . Donner une relation entre  $A$  et  $B$ .
15.  $E = \mathbb{R}^4$  est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  d'équation :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

- a) Déterminez une base orthonormée de  $F$ .
  - b) Donnez la matrice, dans la base canonique de  $E$ , de la projection orthogonale  $p$  sur  $F$ .
  - c) Soit  $u = (1, 1, 1, 1)$ . Calculez  $d(u, F)$ .
16. (CCP 2002) On considère  $\mathbb{R}^3$  euclidien muni de la base orthonormée  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  et  $D$  la droite d'équation  $x = y/2 = z/3$ . Donner la matrice dans  $\mathcal{B}$  de la projection orthogonale sur  $D$ . Pouvaient-on prévoir que la matrice était symétrique réelle ?

### III Endomorphismes orthogonaux, symétriques

17. Soit  $E$  un espace euclidien,  $u \in \mathcal{O}(E)$ ,  $F = \text{Ker}(u - \text{Id})$  et  $G = \text{Im}(u - \text{Id})$ . Montrez que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.
18. (CCP 2002) Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs libres de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\varphi$  l'application  $\varphi : x \mapsto \langle v, x \rangle u + \langle u, x \rangle v$
- a) Quels sont le noyau, le rang et l'image de  $\varphi$  ?
  - b)  $\varphi$  est-elle diagonalisable ?
19. (CCP 2001) soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une base de  $\mathbb{R}^n$  euclidien muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ . Soit  $M$  la matrice de coefficient général  $m_{ij} = (x_i, x_j)$  (la matrice de Gram de la famille  $(x_1, \dots, x_n)$ ).
- a) Montrer que  $M$  est symétrique et inversible.
  - b) Montrer que les valeurs propres de  $M$  sont strictement positives.
  - c) Montrer réciproquement que toute matrice symétrique réelle dont les valeurs propres sont strictement positives peut être écrite sous la même forme que  $M$ .
20. Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On pose  $(A | B) = \int_{-1}^1 A(t)B(t) dt$ .

a) Montrez que l'application  $f : P \in E \mapsto f(P)$  où

$$f(P)(X) = (1 - X^2)P'' - 2XP'$$

est un endomorphisme auto-adjoint de  $E$ .

b) Déterminez le spectre  $f$ . que peut-on en déduire ?

21. (CCP 2000) Soit  $A$  une matrice carrée réelle d'ordre  $n$  et antisymétrique.

a) Montrez que  $I + A$  et  $I - A$  sont inversibles.

b) Montrez que  $(I - A) \cdot (I + A)^{-1}$  est orthogonale.

c) Montrez que  $(I - A) \cdot (I + A)^{-1}$  appartient à  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ .

22. (CCP 2002) que dire d'une matrice symétrique réelle nilpotente ?

23. (CCP 2002) Montrer que la somme des carrés des coefficients d'une matrice symétrique réelle est égale à la somme des carrés de ses valeurs propres. Sans aucun autre calcul, en déduire les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & & & & 1 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 1 & & & & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (n \geq 3)$$

24. (CCP 2004) Montrer que  $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$  définit un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ . Montrer que l'endomorphisme  $M$  défini par  $M(P)(X) = XP'' + (1 - X)P'$  est symétrique. En déduire qu'il existe une base de polynômes propres de  $M$ . Trouver les valeurs propres de  $M$  ainsi que le produit scalaire de deux polynômes propres distincts.

25. (CCP 2004) Trouver  $A$  matrice complexe orthogonale d'ordre 2 de trace nulle et telle que  $A^4 = A$ .