

Feuille d'exercices numéro 4

Corrigés et indications partiels

1. On a $\text{Sp}(A) = \{2, 4, 6\}$. A a donc autant de valeurs propres que son ordre : elle est diagonalisable. Pour calculer A^n : deux méthodes PD^nP^{-1} ou ($\simeq$ HP) remarquer que $(X - 2)(X - 4)(X - 6)$ est annulateur de A ...
2. 2 est valeur propre de B (observer $C_1 - C_3$ dans le calcul de χ_B). Ensuite on factorise le polynôme caractéristique : $\chi_B = (X - 2)(X^2 - 2X + m + 1) = (X - 2)((X - 1)^2 + m)$. On a trois cas : 3 valeurs propres réelles distinctes ($m < 0$ et $m \neq -1$) , 2 réelles dont une double ($m = 0$ ou $m = -1$) et 1 réelle et 2 complexes...
3. A est symétrique réelle donc... $\chi_A = (X - 1)(X - 4)^2$.
4. Difficile... $\chi_M = X(X - 1)^2$.
5. a) On calcule le déterminant de $\mathcal{C}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
 b) La matrice U de u a été calculée à la question précédente : c'est celle dont on a cherché le déterminant. On calcule U^2 ...
 c) La relation trouvée avant permet de calculer U^{-1} et donc de donner u^{-1} .
 d) On calcule (avec des notations évidentes) UF_k et on les exprime en fonction des F_i ...
 e) Toujours avec des notations évidentes, on a $X_{n+1} = \frac{1}{4}UX_n$.
 On a alors $X_{n+2} = \frac{1}{4}X_n$...
 f) U est symétrique réelle donc... La deuxième question donne $\text{Sp } u \subset \{\pm 2\}$.

6. A est symétrique réelle donc... Voir aussi que $A = U \cdot {}^tU$ où U est la colonne associée à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Il faut résoudre le système $AX = \lambda X$ qui est alors $U \cdot ({}^tUX) = \lambda X$. De deux choses l'une : soit $\lambda = {}^tUX = 0$ soit X est un multiple de U
7. a) $A^2 = nA$.
 b) Si A était inversible on pourrait multiplier l'équation précédente par A^{-1} ...
 c) Voir la question précédente...
 d) Toutes les colonnes sont proportionnelles donc...
8. On en cherche **une**. On commence par voir que M^2 est diagonalisable. On écrit $M^2 = PDP^{-1}$, puis on cherche Δ , diagonale telle que $\Delta^2 = D$...
9. a) On analyse la question posée pour voir que V_1, V_2 sont propres pour A . On les trouve via une méthode appropriée, puis on résout le système correspondant à $AV_3 - 2V_3 = V_2$...
 b) Un petit déterminant...
 c) On analyse la première question pour voir que :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Et on se souvient qu'on a changé de base...

10. a) On a $\chi_A = X^2 - 2X + 2 = (X - 1)2 + 1 = (X - 1 + i)(X - 1 - i)$.
 b) Pas de valeurs propres réelles donc...
 c) $AX = X^3 = \dots$
11. a) $\chi_A = (X - a)^3$...
 b) $F = \text{vect } \{ \}, G = \text{vect } \{ \}$.
13. $\text{Sp}(A) = \{(a + b)^2, (a - b)^2, a^2 - b^2\}$. Les vecteurs propres associés sont $(1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, 1), (1, 0, 0, -1)$ et $(0, 1, -1, 0)$...

14. a) On cherche A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
 b) On diagonalise A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, pour trouver $A = PDP^{-1}$.
 On a ensuite $X_n = PD^n P^{-1} X_0 \dots$
 c) On est amené à calculer $P \lim(D^n) P^{-1} \dots$
15. Pour le b. on commence par diagonaliser $A = PDP^{-1}$.
 L'équation $M^3 - 2M = A$ devient alors $N^3 - 2N = D$ où
 $M = PNP^{-1}$. En remarquant qu'on a $ND = DN$, on trouve
 la forme de $N \dots$
16. A est diagonalisable (et possède une valeur propre double)
 On se sert du cours.
17. a) A est inversible donc elle vérifie l'équation $A^2 = 3A - 2I$.
 $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$, donc son polynôme caractéristique est scindé,
 la matrice A est donc trigonalisable. En considérant la
 forme triangulaire de A , on observe que $\text{Sp}(A) \subset \{1, 2\}$.
 Donc $\chi_A(x) = (x-1)^p(x-2)^q$ avec $p+q=6$. Puis on
 se sert de $\text{tr}(A) = 8 = p \cdot 1 + q \cdot 2$ pour le déterminer
 complètement.
- b) A est inversible donc $\text{rg}(AM) = \text{rg}(M) \dots$
- c) On fait la division euclidienne de X^k par $X^2 - 3X + 2$.
18. a) Le polynôme annulateur permet de dire que $\text{car}(A) \subset \{1\}$.
 Comme le polynôme caractéristique de A est scindé, on
 a au moins une valeur propre. Conclusion $\text{car}(A) = \{1\}$ et
 $\chi_A = (X-1)^n$.
- b) Pour $n=2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient. Pour n quelconque,
 $A = I + J$, où $J^2 = 0$ convient. Pour J prendre la matrice
 où tous les coefficients sont nuls sauf celui $(1, n)$.
- c) Voir le 17.c...
20. On cherche d'abord les éléments propres de A . Ensuite on
 cherche à résoudre :

$$B \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad \text{càd} \quad \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & A \end{array} \right) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

On voit alors que $2A(X+Y) = \lambda(X+Y)$ et donc soit $\lambda/2 \in \text{Sp}(A)$ soit $\lambda = 0$ et $X+Y \in \ker(A)$...

22. $f^2 = \text{Id}$...

23. Diagonaliser... Que dire alors des valeurs propres de A ?

25. Notons x et y ces deux vecteurs propres. On veut donc avoir à la fois :

$$f(x) = \alpha x, \quad f(y) = \beta y, \quad f(x+y) = \gamma(x+y).$$

On discute selon que la famille (x, y) est libre ou pas.

a) Si la famille est liée, on a forcément $\alpha = \beta = \gamma$: on ne change pas de sous-espace propre.

b) Si elle est libre, on utilise $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour avoir $\gamma x + \gamma y = \alpha x + \beta y$ et en déduire $\alpha = \gamma = \beta$: on ne change toujours pas de sous-espace propre...

26. On voit rapidement¹ que $f(P)$ admet a comme racine triple. On a alors l'idée de calculer la matrice de f dans la base $(1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$...

27. On calcule la matrice de u et v relativement à la base canonique...

28. On cherche d'abord le spectre, puis on détermine la dimension des sous-espaces propres en observant le rang de $A - \lambda I_n$ et $B - \lambda I_n$...

29. Des idées :

a) On remarque que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

b) Notons φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ associé à A . Si on note $w = u + iv$ (notation évidente) un vecteur propre associé à i alors $\overline{w} = u - iv$ est un vecteur propre associé à $-i$. Que valent $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$?

30. Écrire $A = J - I_n$ où $J = (1)$. Il faut connaître les éléments propres de J .

1. C'est en fait un exercice classique

31. On passe par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on trigonalise, on détermine les valeurs propres possibles et les conditions issues de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On trouve alors :

$$\text{rg}(M) = n, \text{ tr}(M) = -n/2, \det(M) = 1$$

32. a) Se rappeler que si X solution alors $AX = (X^2 - 3X)X = \dots$
 b) Diagonaliser A , résoudre $Y^2 - 3Y = D$ (Y va commuter avec D et alors Y sera...), puis reconstruire $A = PDP^{-1}$.
 33. a) Cours.
 b) Lire A .
 c) Calculer A^2 puis $A^3 \dots$
 d) On a polynôme annulateur. On déduit donc les valeurs propres potentielles : $\{0, \pm\sqrt{n-1}\}$. On a déjà $\ker(A)$. Reste à résoudre $AX = \pm\sqrt{n-1}X$. On tombera sur :

$$\ker(A - \varepsilon\sqrt{n-1}I_n) = \text{vect} \{(\varepsilon\sqrt{n-1}, 1, \dots, 1)\}$$

- e) Le c. nous permet de dire que $\mathbb{R}[A] = \text{vect} \{I_n, A, A^2\}$
 f) On trouve $\dim(\mathcal{C}(A)) = (n-1)^2 + 1 + 1 \dots$
 34. On se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on trigonalise A . Ne pas oublier les informations sur les valeurs propres complexes.
 35. Le mieux c'est de prendre une base adaptée à $E = \ker p \oplus \text{Im } p$ et de voir, en calculant par blocs l'allure de la matrice de $\varphi(f)$ à partir de celle de f .
 36. On considère la matrice U de u dans une base arbitraire de $\mathbb{R}^3$. On étudie alors U comme matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \dots$ Le polynôme annulateur donne les candidats pour les valeurs propres. On peut alors calculer $\text{tr}(U) = \text{tr}(u) \dots$