

Feuille d'exercices numéro 6

Séries

Corrigé/indications

1. Ici on veut que $|R_n| \leq 10^{-2}$ et pour cela, comme toutes les séries satisfont aux hypothèses du théorème spécial des séries alternées, on veut $|u_{n+1}| \leq 10^{-2}$. On a donc :

a) $n = 49$, $S_n = 0,78$.

b) $n = 3$, $S_n = 0,17$.

c) $n = 7$, $S_n = -0,83$.

d) $n = 2499$, $S_n = -0,61$.

2. On a : $\frac{1}{x(2x-1)} = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$. Observons alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(2k-1)} \end{aligned}$$

3. Série alternée satisfaisant au théorème ad-hoc. Ensuite :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n u_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 x^{2k} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1 + x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} + R_n\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à majorer $|R_n|$ et conclure...

4. Même principe qu'au 3. Se servir du fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée...

5. Faire un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$. Penser à $\exp(\ln(\dots))$. Attention : le logarithme doit être développé à l'ordre 3...

6. Utiliser la règle de d'Alembert ou la formule de Stirling pour conclure dans les cas $|b| < e$ et $|b| > e$. Le cas $b = e$ se traite à l'aide de la formule de Stirling. les autres cas sont indéterminés.

7. a) $a_n = u_{n+1} - u_n$ où $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

b) $b_n = u_n - u_{n+1}$ où $u_n = \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$.

8. On écrit $n^2 + 1 = n^2(1 + 1/n^2)$ etc. et on fait un développement limité à l'ordre 1 en $1/n$ pour conclure que les deux séries divergent (en fait grossièrement si $a \neq 0$).

9. La série converge absolument. Pour la somme on utilise $\cos(\alpha) = \Re(e^{i\alpha})$ et on somme une série géométrique.

10. Même idée qu'au 8.

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + a^2} &= n \cdot \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}} \\ &= n \cdot \left(1 + \frac{a^2}{2n^2} - \frac{a^2}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= n + \frac{a^2}{2n} - \frac{a^2}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}u_n &= \sin(\pi\sqrt{a^2 + n^2}) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi a^2}{2n} - \frac{\pi a^2}{8n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= (-1)^n \frac{\pi a^2}{2n} + (-1)^n \frac{K}{n^3} o\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Avec K une constante à déterminer. On voit donc que $\sum u_n$ est la somme d'une série alternée convergente et d'une série absolument convergente (un $O(1/n^3)$)...

11. On fait un développement limité pour $\sum u_n$ pour voir qu'elle converge. Par contre $\sum v_n$ diverge grossièrement.

12. On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{x(4x^2 - 1)} = \frac{1}{2x + 1} + \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{x}$$

ensuite on utilise le fait (indication !) qu'il existe une constante A telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + A + o(1)$$

et qu'on a ensuite :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \\
 &= \sum_{\ell=1}^{2n} \frac{1}{\ell} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\
 &= \ln(2n) + A + o(1) - \frac{1}{2} \ln(n) - \frac{A}{2} + o(1) \\
 &= \ln(2) + \frac{1}{2} \ln(n) + \frac{A}{2} + o(1)
 \end{aligned}$$

13. On a $n^2 + 2n \cos \theta - \sin^2 \theta = (n + \cos \theta)^2 - 1$ et ensuite :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 2n \cos \theta - \sin^2 \theta} = -\frac{1}{n+1+\cos \theta} + \frac{1}{n-1+\cos \theta}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\sum_{k=2}^n u_k \dots$

14. a) Alternée : on a $\ln(1+x)$ est du signe de x , donc u_n est du signe de $(-1)^n$.

b) Utiliser le théorème spécial paraît difficile. On fait donc un développement limité :

$$\begin{aligned}
 u_n &= \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) \\
 &= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= \frac{(-1)^n}{n} - v_n
 \end{aligned}$$

Avec $v_n \sim \frac{1}{2n^2}$. Donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum v_n$ converge et comme $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

converge, il en est de même pour $\sum u_n$.

c) Observons :

$$\begin{aligned} u_{2n-1} + u_{2n} &= \ln\left(1 - \frac{1}{2n-1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2n-2}{2n-1}\right) + \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \\ &= \ln(n-1) - \ln(n) \\ &\quad + \ln(2n+1) - \ln(2(n-1)+1) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{2n} u_k &= u_2 + (u_3 + u_4) + \cdots + (u_{2n-1} + u_{2n}) \\ &= u_2 + \sum_{\ell=2}^n u_{2\ell-1} + u_{2\ell} \\ &= u_2 + \ln(1) - \ln(n) + \ln(2n+1) - \ln(3) \\ &= \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \ln(3) \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 0$$

15. a) Comme au 8 on fait un développement limité à l'ordre 2 en $1/n$:

$$u_n = (1 + a + b)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2}a + b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Donc $\sum u_n$ ne peut converger que ssi $1 + a + b = a/2 + b = 0$ c'est à dire $(a, b) = (-2, 1)$.

- b) On a alors : $u_n = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ et donc $\sum u_n$ est télescopique.
16. a) On remarque que $v_n = w_n - w_{n-1}$ où $w_n = \frac{1}{(1+u_0) \cdots (1+u_n)}$ et donc $\sum_{k=0}^n v_k = 1 - w_n$.
- b) Si $u_n \leq 0$ alors la suite (w_n) est décroissante positive et donc convergente. La série $\sum v_n$ est donc convergente.
- c) Ici : erreur d'énoncé, on ne veut que $\sum v_n$ converge. On utilise le fait que $\ln(w_n) = -\sum_{k=0}^n \ln(1+u_k)$. Il ne reste plus qu'à montrer que la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge.
- d) Même principe, on utilise $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \dots$
17. Dans l'ordre converge, diverge et converge si et seulement si $a < 1$.
18. Voir 16.c, d.
19. Reste d'une série convergente et voir le cours pour la recherche de l'équivalent.
20. On reconnaît un produit de Cauchy. Celui de $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n!}$. Attention ici, $u_n = 1/n^2$ quand $n \geq 1$ et $u_0 = 0$. On a alors $\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ qui vaut $w_n \dots$
21. a) La suite (x_n) est positive et majorée par $1/(n+1)$. Par encadrement elle converge vers 0.
- b) Donc $e^{-x_n} \rightarrow 1$ et donc $x_n \sim 1/n$.
- c) La série $\sum x_n$ est donc divergente.

22. Il faut rechercher un équivalent à $\sum_{k=1}^n \sqrt{k}$. On le fait en encadrant à l'aide de l'intégrale $\int_1^n \sqrt{t} dt$.

On voit alors que $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 5/2$.

23. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}$.

24. On encadre brutalement : pour tout $t \in [2n, 3n]$,

$$1 + 4(2n)^{2/3} \leq 2 + \cos(2t) + 2t^{2/3} \leq 3 + 4(3n)^{2/3}$$

Donc :

$$u_n \geq \frac{n}{3 + 4(3n)^{2/3}} \sim Kn^{1/3}$$

De ce fait $\sum u_n$ diverge : on la minore par une série positive grossièrement divergente.

25. a) On a $\sin^2 + \cos^2 = 1$, donc $\alpha = \arccos(\sqrt{1-x^2})$ est tel que $\cos^2(\alpha) = 1-x^2$ et donc $x^2 = \sin^2 \alpha$. Comme $\sin \alpha > 0$, on a $\sin(\alpha) = x$ et finalement $\alpha = \arcsin(x)$.

b) On sait que $\arcsin(u) \sim u$ quand $u \rightarrow 0$. On a donc $u_n \sim 1/n^2$ et donc ... $\sum u_n$ converge.

26. Faisons le changement de variables $s = \sqrt{n}t$, on a :

$$u_n = \int_{1/\sqrt{n}}^1 e^{-nt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^{\sqrt{n}} e^{-s^2} ds.$$

Comme $K = \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, on a $u_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$ et donc ...

$\sum u_n$ diverge.

27. On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k} &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}} \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \left(\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right)^2 + o\left(\frac{1}{k}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\end{aligned}$$

La série est donc la somme d'une série convergente et d'une série ... divergente : elle est donc divergente.