

Feuille d'exercices numéro 6

Séries

1. Déterminez la nature des séries qui suivent. Si la série converge déterminez n à partir duquel on est sûr que $|S - S_n| \leq 10^{-2}$, puis donnez un encadrement de S à 10^{-2} près.

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

b) $v_n = \frac{(-1)^n}{2n^3+3}$.

c) $w_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.

d) $t_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

2. Sachant que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$, calculez $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2k-1)}$.

Indication : on pourra décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{x(2x-1)}$.

3. Nature et somme de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ ($n \geq 0$). Indication : pour le calcul de la somme utilisez, par exemple : $\int_0^1 x^{2n} dx$.

4. Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^1 x^n f(x) dx$ converge de somme $\int_0^1 \frac{f(x)}{1+x} dx$.

5. Nature de la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \cdot [(1 + 1/n)^{-n} - 1/e].$$

6. (CCP 2005) Nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^n}{n!b^n}$.
7. (CCP 2002 ; séries télescopiques) Montrer que les séries suivantes sont convergente et calculer leur somme.
- a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}}$ ($n \geq 2$).
- b) $b_n = \ln(1 - 1/n^2)$ ($n \geq 2$).
8. (CCP 2002) nature des séries de termes généraux

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1} \text{ et } v_n = \sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + 1}.$$

9. (CCP 2002) Soit $\frac{u_n = \cos(nx)}{2^n}$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n et donner éventuellement sa somme.
10. (CCP 2003) Nature de $\sum \sin(\pi\sqrt{a^2 + n^2})$.
11. (CCP 2003) Nature des séries de terme généraux

$$u_n = e^{\frac{1}{2^n}} - e^{\frac{1}{2^{n+1}}} \text{ et } v_n = e^{\frac{1}{2^n}} + e^{\frac{1}{2^{n+1}}}.$$

12. (CCP 2003) Nature et somme éventuelle de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(4n^2 - 1)}$ ($n \geq 1$).

13. (CCP 2004) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 2n \cos(\theta) - \sin^2(\theta)}$ converge et calculer sa somme.

14. (École de l'Air 2004) Montrer que la série de terme général $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ ($n \geq 2$) est alternée, qu'elle converge et calculer sa somme.

15. (Centrale 2003, CCP 2005) Soit $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

- a) Donner la nature de $\sum u_n$.

- b) Lorsque $\sum u_n$ converge calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
16. Soit (u_n) une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq -1$.
On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\cdots(1+u_n)}$.
- a) Exprimer simplement $\sum_{k=0}^n v_k$ en fonction de $u_0, u_1, \dots, u_n$.
- b) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Déterminer la nature de $\sum v_n$.
- c) On suppose que $\sum |u_n|$ converge. Quelle est la nature de $\sum v_n$?
- d) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum v_n$ converge si et seulement si $\sum u_n^2$ converge.
17. Nature des séries
- a) $\sum \frac{e^{-2n}}{1+n}$
- b) $\sum \frac{\ln(n)}{n}$
- c) $\sum a^{\sqrt{n}}$.
18. Soit (u_n) une suite positive.
- a) Montrer que $\sum u_n$ et $\sum \ln(1+u_n)$ sont de même nature.
- b) Ce résultat est-il encore valable avec une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque ?
19. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$ tend vers 0 et en donner un équivalent.
20. Montrer la convergence et donner la somme de la série de terme général $w_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2(n-p)!}$.

21. Soit $x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{n+1}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
- a) Nature de la suite (x_n) .
 - b) Déterminer un équivalent de x_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
 - c) Nature de la série $\sum x_n$.

22. (Centrale 2001) Étudier la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

23. (CCP 2002) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$. On pourra décomposer $\frac{1}{(2x+1)(2x+3)}$ en éléments simples.

24. (Centrale 2002) Nature de la série de terme général

$$u_n = \int_{2n}^{3n} \frac{dt}{2 + \cos(3t) + 4t^{2/3}}.$$

25. (CCP 2003)

- a) Soit $x \in [0, 1]$. Trouver une relation entre $\arccos(\sqrt{1-x^2})$ et $\arcsin(x)$.
- b) Quelle est la nature de la série de terme général

$$u_n = \arccos \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

26. Nature de $\sum \int_{1/\sqrt{n}}^1 e^{-nt^2} dt$.

27. Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.