

Feuille d'exercices numéro 7

Séries entières

Indications et corrigé partiel

I Rayons de convergence

1. On trouve :
 - a) $R_a = 0$.
 - b) $R_b = 1/e$.
 - c) $R_c = 1$. Voir un produit de Cauchy, ou encadrer la somme finie.
 - d) $R_d = 1$.
 - e) $R_e = e$. Stirling !
 - f) $R_f = 1$.
 - g) $R_g = 1$.
 - h) $R_h = 1$. On voit $k \cdot k! = (k+1)! - k!$.
2. a) On a clairement $10^{N-1} \leq n < 10^N$. C'est à dire $10^{a_n-1} \leq n < 10^{a_n}$.
 - b) Donc en passant au logarithme, $\frac{\ln(n)}{\ln(10)} < a_n \leq 1 + \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$.
 - c) $R_a = 1$.
 - d) On a, pour $n \geq 1$, l'encadrement $1 \leq b_n \leq 9a_n$ et donc $R_b = 1$.
 - e) On a la majoration $c_n \leq 9^{a_n} \leq n$ et donc $R_c \geq 1$. Mais (c_n) ne tend pas vers 0 et donc $R_c \leq 1$.
3. a) Soit r tel que $0 < r < R$. Pour z quelconque :

$$0 \leq \left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| = |a_n r^n| \cdot \frac{(|z|/r)^n}{n!}$$

Comme $0 < r < R$, $a_n r^n \rightarrow 0$. Donc, en posant $q = |z|/r$:

$$0 \leq \left| \frac{a_n}{n!} z^n \right| = o\left(\frac{q^n}{n!}\right)$$

Comme la série exponentielle $\sum q^n/n!$ converge pour tout $u \geq$, par comparaison par $\leq$ de séries à termes positifs, $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument pour tout z et donc $R = +\infty$.

b) On a, pour z réel :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1} = -\frac{\ln(1+z)}{z} \quad (R=1) \\ g(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{z}(e^z - 1) \end{aligned}$$

4. a) Le cas $\alpha = 0$ est simple, on obtient $\rho = 1 = R^0$.

Supposons maintenant $\alpha > 0$ et $r > 0$. Le signe de α permet de dire $(a_n r^n)$ est bornée si et seulement si $(a_n^\alpha (r^n)^\alpha)$ bornée, si et seulement si $(a_n^\alpha (r^\alpha)^n)$ est bornée. En prenant successivement $x = r$ pour $0 < r < R$ et $r > R$, on obtient bien $\rho \geq R^\alpha$ puis $\rho \leq R^\alpha$.

b) Soit $r < R$. Comme $\alpha < 0$, on a $a_n r^n \rightarrow 0$ bornée induit $(a_n^\alpha (r^\alpha)^n)$ pas bornée, induit $r^\alpha \geq \rho$. On a donc l'implication : pour tout r , $r < R \Rightarrow r^\alpha \geq \rho$. Donc $R^\alpha \geq \rho$.

Deux exemples correspondant à la question pour $\alpha = -1$ sont : $\sum 2^n x^n$ et $\sum a_n x^n$ où $a_n = 1$ pour n pair et $a_n = n!$ pour n impair.

5. On examine les séries $\sum a_{2n}x^{2n}$ et $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$. Elles ont même rayon de convergence $R' = \sqrt{l_1 l_2}$, donc $R \geq R'$. Mais si $|x| > R'$, $(a_{2n}x^{2n})$ n'est pas bornée (déf de R') et donc $(a_n x^n)$ n'est pas non plus bornée. Comme la propriété précédente est vraie pour tout x tel que $|x| > R'$, on a $R \leq R'$.
6. On voit que la suite (a_n) est décroissante positive (inégalités classiques de $\ln$) et que la seule limite possible est 0 (on résout $x = \ln(1+x)$ via une étude de fonctions).
 a) Comme $a_n \rightarrow 0$, on a $a_{n+1} \sim a_n$. De ce fait $R = 1$.
7. Cf question 4 : on a $R_b = R_a^2$.
8. a) $R_a = 1$
 b) $R_b = 1$. Faire un développement limité de b_n .
9. a) Quoi qu'il arrive $R = 1$. Il est judicieux de séparer trois cas $a = 0$, $a > 0$ et $a < 0$.
 b) En notant $\mathcal{D}$ ce domaine, on a :

$$\mathcal{D} = \begin{cases}]-1, 1[& \text{si } a \geq 0, \\ [-1, 1[& \text{si } -1 \leq a < 0, \\ [-1, 1] & \text{si } a < -1. \end{cases}$$

10. On encadre brutalement $\frac{n}{\sqrt{2n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ et on obtient $R = 1$.
11. D'abord :

$$\begin{aligned} n^2 \pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) &= n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \cos\left(n^2 \pi \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{\pi}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Donc u_n est la somme du terme général d'une série qui converge (on a utilisé le théorème spécial des séries alternées) et de celui d'une série absolument convergente. La série $\sum u_n$ converge donc.

Ensuite, on voit que $u_n \sim (-1)^n \frac{\pi}{3n}$, donc le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$ est $R = 1$. De plus $\sum u_n$ converge et $u_n \cdot (-1)^n \frac{\pi}{3n}$ donc $\sum u_n (-1)^n$ diverge. Conclusion : $\sum u_n x^n$ converge ssi $u_n \in]-1, 1]$.

12. a) On utilise le théorème de la convergence dominée.

b) On a clairement (a_n) décroissante et on a vu $a_n \rightarrow 0$. Le théorème spécial des séries alternées permet alors de conclure pour la convergence. Pour la somme on écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k &= \int_0^1 \frac{1 + (-1)^{n+1} \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1+t^2}{2}} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot \int_0^1 \frac{\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{3+t^2} dt \\ &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot R_n \end{aligned}$$

Une majoration montre que $0 \leq R_n \leq \frac{1}{3} a_{n+1} \dots$

c) On encadre $\frac{1}{2^n} \leq a_n \leq 1$ et on déduit que $R = 1$.

13. C'est du cours !

14. $R = e$. Stirling !

II Calcul de sommes

15. a) Récurrence. Attention il faut faire une hypothèse sur a_n et $a_{n-1} \dots$

b) Par comparaison $R = 1$.

c) Observons les différents éléments :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} x^n &= \sum_{m=2}^{+\infty} a_m x^{m-1} \quad (m = n + 1) \\
 &= \frac{1}{x} (f(x) - a_0 - a_1 x) \\
 &= \frac{1}{x} (f(x) - 1 - x) \\
 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n+1} x^n &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n+1} x^{n+1} \\
 &= \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} t^n dt \\
 &= \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{m=0}^{+\infty} a_m t^{m+1} dt \\
 &= \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt
 \end{aligned}$$

On a donc l'équation :

$$\frac{1}{x} (f(x) - 1 - x) = f(x) + \frac{2}{x} \int_0^x t f(t) dt$$

En multipliant par x puis en dérivant, on obtient :

$$f'(x) - 1 = f(x) + x f'(x) + f(x) + 2x f(x)$$

16. a) Par exemple (i^n) .

b) On a, en faisant des paquets de 4 termes :

$$\begin{aligned} S_{4p-1}(x) &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{\ell=4k}^{4k+3} a_\ell x^\ell \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{m=0}^3 a_m x^{4k+m} \\ &= S_3(x) \sum_{k=0}^{p-1} x^{4k} \\ &= S_3(x) \frac{1 - x^{4p}}{1 - x^4} \end{aligned}$$

c) La limite existe si et seulement si $|x| < 1$.

d) On a donc $S(x) = \frac{S_3(x)}{1 - x^4}$.

17. On a, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (\alpha\beta)^n a_0, \\ a_{2n+1} &= \beta \cdot (\alpha\beta)^n a_0 \end{aligned}$$

Un calcul similaire à la question 5 donne $R = \sqrt{\alpha\beta}$, puis, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} &= \frac{a_0}{1 - \alpha\beta x^2}, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} &= \frac{a_0 \beta x}{1 - \alpha\beta x^2} \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1 + \beta x}{1 - \alpha\beta x^2} a_0.$$

18. a) $R = 1$. Pour la somme, écrire $an^2 + bn + c = a(n+1)(n+2) + d(n+1) + e$ et utiliser les dérivées de la série géométrique.
- b) $R = 1$. Observer $\frac{d}{dx}(x^2 f(x)) = -x \ln(1-x)$.
- c) $R = 2$. Remarquer que $n^2 + n + 1 = (n+1)(n+2) - 2(n+1) + 1$ et utiliser les dérivées de la série géométrique.

$$f(x) = 2 \frac{x^2 + 4}{(2+x)^3}.$$
- d) $R = +\infty$. Voir que $f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$.
- e) $R = 1 : R \geq 1$ en majorant les coefficients par 1, puis $R \leq 1$ parce que les coefficients ne tendent pas vers 0.
 Pour la somme dériver et utiliser $\cos(x) = \Re e(\dots)$
- f) $R = 1$. Observer $g'(y)$ où $g(y) = yf(y^3)$.
- g) $R = +\infty$.
- h) $R = 1$. Calculer f' , f'' et voir...
- i) Séparer les termes d'ordre pair et ceux d'ordre impair.
 $R = 1$.
- j) $R = 1$. Calculer explicitement $1 + 2 + \dots + n$, puis calculer g'' ou $g(x) = xf(x)$.
- k) $R = 1$. Poser $y = x^4$.
- l) $R = +\infty$. Pour $x > 0$ poser $y = \sqrt{x^3}$. Utiliser la parité de f .
19. Voir que $2n^3 + 1 = 2n(n-1)(n-2) + an(n-1) + bn + 1$ avec a et b à déterminer.
20. Voir que $\cos(n) = \Re e(\dots)$ et sommer une série géométrique.
21. **À revoir...**
22. D'abord, on voit que $u_n = a(-1)^n + b(3)^n$. On a donc $R =$

1/3. Pour tout x tel que $|x| < 1/3$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^n &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_nx^n \\ &= \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} u_nx^n + 3 \sum_{n=0}^{+\infty} u_nx^n \\ &= \frac{2}{x}(f(x) - u_0) + 3f(x)\end{aligned}$$

Mais :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+2}x^n = \frac{1}{x^2}(f(x) - u_0 - u_1x)$$

23. Ici $u_n = a + b \cdot 2^n$, donc $R = 1/2...$

24. $R = 1$. Pour $x > 0$, on pose $y = \sqrt{x}$ et on observe $yf(y^2)$.
Pour $x < 0$, on pose $y = \sqrt{-x} = \sqrt{|x|}$. On a alors $x = -y^2$
et on regarde donc $yf(-y^2)...$

25. Déjà dans la liste...

26. En majorant a_n , on a facilement $R \geq 1$.

27. Voir le suivant

28. L'indication dit tout...

29. Utiliser $\ln(2) = \int_0^2 \frac{dt}{1+t}$ et utiliser la somme $\sum_{k=0}^n (-t)^k$ quand
 $t \in [0, 1]...$

III Développements en série entière

30. a) On utilise celui de $\sqrt{1-u}$. $R = 1$.

b) On a en fait $(1 - 2x + x^2) \cdot \frac{1}{(1-x)^2} \cdot R = 1$.

- c) On veut $\Re(\exp(-ix - x))$. $R = +\infty$.
 - d) Peu commode... $f'(x) = ?$ $R = 1$.
 - e) $f'(x) = ?$ $R = 1$.
 - f) $1 - (a + b)x + abx^2 = (1 - ax)(1 - bx)$.
 - g) Produit de Cauchy... $R = 1$.
 - h) Factoriser le dénominateur. $R = 1$.
 - i) Même idée que les précédents. $R = 1$.
 - j) $x^2 - 2\cos(\theta)x + 1 = (e^{i\theta} - x)(e^{-i\theta} - x)$. $R = 1$.
 - k) Idem précédent.
 - l) Idem h.
 - m) $f' = ?$ idem précédent...
 - n) Produit de Cauchy. $R = +\infty$.
 - o) $f' = ?$ $1 + (x + 1)^2 = (-1 + i - x)(-1 - i - x)$. $R = |1 \pm i| = \sqrt{2}$.
31. a) $R = 1$.
- b) On dérive et on réindice !
 - c) On résout l'équation en se souvenant que $f(0) = 0$.
32. $f'(x) = ?$ $R = +\infty$.
33. $R = +\infty$.
34. $f'(x) = ?$ $R = 1/3$. En fait, on voit que $f(x) = f(0) - \arctan(3x) \dots$
35. a) Primitive !
- b) $G'(x) = ?$
 - c) Primitive de DSE etc. $R = 1$.
 - d) On a une série alternée.
36. Intversion série-intégrale. On utilise le DSE de $\cos$.
37. $y' - xy = 1$. On cherche la solution DSE tq $y(0) = 0$.
38. a) $e^t + x \sin(t) \geq e^t - x > 0 \dots$

- b) On fait un DSE de $\frac{1}{1 + xe^{-t} \sin(t)}$ au voisinage de 0 pour x . Puis interversion série intégrale.
39. $a_n \rightarrow e$ donc (a_n) est bornée d'où $R \geq 1$ et $\sum a_n$ diverge et donc $R \leq 1$.
- a) Reconnaître un produit de Cauchy.
- b) Dériver ou multiplier par...
40. vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. Ensuite $f' = ?$ Voir que f' est DSE puis conclure. On ne connaît pas $f(0)$.
41. DSE de ch...