

Feuille d'exercices numéro 10

Indications et corrigés partiels

I Suites

1. a) CS vers g définie par $g(x) = 1$ si $x \in [0, 1]$, $g(x) = 0$ si $x > 1$. PB en 1 : limite discontinue... CU sur $[0, a]$ et $[b, +\infty[$ avec $0 < a < 1 < b$.
 b) CS vers 0. CU sur $[a, +\infty[$
 c) CS vers 0. CU sur $[0, a]$.
 d) CS vers g telle que $g(0) = 0$ et $g(x) = 1$ si $x > 1$. CU sur $[a, +\infty[$
2. CS et CU vers 0 sur $\mathbb{R}$.
3. a) CS vers 1.
 b) $\|f_n - 1\|_{\infty, [-a, a]} = 1 - \exp\left(-\frac{1+a^2}{n^2}\right) \dots$
 c) $\|f_n - 1\|_{\infty, \mathbb{R}} = 1 \dots$
4. a) CS vers 0.
 b) $I_n = \frac{1}{2n} \ln(1 + 2^n) \longrightarrow \frac{1}{2} \ln(2)$. Il n'y a pas CU sur $[0, 1]$
 sinon $I_n \longrightarrow 0$.
5. a) $g_n(x) = (n+1)^3 \cdot x \cdot \left(\frac{1}{n+1} - x\right)$ donc arc de parabole simple sur $\left[0, \frac{1}{n+1}\right] \dots$
 b) $\int_0^1 g_n(t) dt = \frac{1}{6}$.
 c) CS vers 0. Il ne peut y avoir CU sur $[0, 1]$ sinon I_n tendrait vers 0...

II Séries

6. a) On remarque tout de suite que f est impaire : on peut se limiter à $\mathbb{R}_+$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$. La série converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ d'où continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ puis par parité sur $\mathbb{R}^*$.

b) f est somme de fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut aussi appliquer le théorème de dérivation sur tout segment.

$$\text{on a } \operatorname{sh}(u) \geq \frac{e^u}{2}, \text{ donc, si } x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{2(1 - e^{-x})}.$$

En 0^+ : f étant décroissante, elle a une limite éventuellement infinie. Si cette limite est finie et vaut L , on a, pour tout

$$n \text{ et tout } x > 0 : L \geq f(x) \geq \sum_{k=1}^n u_k(x). \text{ Or la somme finie}$$

tend vers $+\infty$ en 0^+ . On ne peut donc avoir L finie.

7. a) Séparer les cas $x = 0$ et $x > 0$.

b) Étudier la fonction f_n et voir que $\|f_n\|_{\mathbb{R}_+} = \frac{1}{n \ln n}$ et que si $a > 0$ et n assez grand $\|f_n\|_{[a, +\infty[} = f_n(a)$.

c) On utilise la version sur tout segment.

d) Observer $\frac{S(x) - S(0)}{x - 0}$ et voir que cette fonction est décroissante et ne peut avoir de limite finie en 0 (même idée qu'au XX.b)...

e) Observer $\sum_{n \geq 1} x^k f_n(x)$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$...

8. a) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$. Sans dériver : f est décroissante car somme de fcts décroissantes.

- b) La série converge normalement sur $[1, +\infty[$. On en déduit $\lim_{+\infty} f = 0$.
- c) Montrer que $e^x f(x) \rightarrow 1$...
- d) Ici on va comparer à une intégrale. On commence par encadrer $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt$ à l'aide de f , pour en déduire un encadrement de f ...
- e) On utilise le théorème d'intégration des séries de fonctions intégrables. Attention : l'intervalle d'intégration n'est pas un segment.
9. On remarque que $\cos(2nx) = \Re(e^{2inx})$. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. On montre entre autres que $f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)^p \cos(2nx + p\pi/2)}{(2n)!}$. On peut tuer l'exercice en calculant $f(x)$ dès le début !
10. a) Séparer les cas $x \in [0, 1[$ (majorer par une série géométrique) de $x = 1$ (série nulle).
- b) $\|x^n(1-x)\|_{[0,1]} \sim \frac{1}{ne}$.
11. a) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et f est paire : on se restreint à $\mathbb{R}_+$.
- b) Pour $u \geq 0$, on majore $\ln(1+u) \leq u$ et on a convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.
- c) On utilise le théorème ad-hoc (toujours sur $\mathbb{R}_+$).
- d) i) $f'(0) = 0$ donc un DL_1 ne suffit pas. Plusieurs méthodes alors. Soit on explore si f est deux fois dérivable en 0 puis on fait un DL_2 , soit on montre que pour $0 \leq x < 1$, $u - u^2/2 \leq \ln(1+u) \leq u$...
- ii) On encadre l'intégrale $\int_n^{n+1} \ln\left(1 + \frac{x^2}{t^2}\right) dt$.
12. a) $E = \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$.
- b) Convergence normale sur E ...

- c) On travaille sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$: f y est $\mathcal{C}^\infty$.
13. Convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ et normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.
14. On remarque d'abord que f est paire. On a $0 \leq u_n(x) \leq 1/n^2$: convergence normale sur $\mathbb{R}$. Pour la dérivée, on se place sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
15. a) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Il faut séparer les cas $x \leq 0$ et $x > 0$ et trouver un équivalent de $u_n(x)$ dans les deux cas. On se place ensuite sur tout segment de $\mathbb{R}$.
- b) On a $0 \leq u'_n(x) \leq 1/n^2 \dots$
16. a) On remarque tout de suite que f impaire : on se place sur $\mathbb{R}_+$. Sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leq u_n(x) \leq \frac{\pi}{2n^2}$.
- On a $u'_n(x) = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$. Pour la dérivée on se place sur un segment de $\mathbb{R}_+^*$.
- b) Pour $x > 0$, on encadre $\int_n^{n+1} \frac{1}{t(1+t^2x^2)} dt$ pour déduire un encadrement de $f'(x)$ et ainsi trouver un encadrement de f et conclure...
- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+t^2x^2)}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, donc pour tout $n \geq 1$:

$$u'_n(t) \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t(1+t^2x^2)} dt \geq u'_{n+1}(x)$$

et donc :

$$f'(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2x^2)} dt \geq f'(x) - u'_1(x) = f'(x) - \frac{1}{1+x^2}$$

Comme :

$$\frac{1}{t(1+t^2x^2)} = \frac{1}{t} - \frac{tx^2}{1+t^2x^2}$$

On déduit :

$$-\ln(x) + \ln(\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{1+x^2} \geq f'(x) \geq -\ln(x) + \ln(\sqrt{1+x^2})$$

On voit que $f'(x) + \ln(x)$ est bornée au voisinage de 0 et donc on en déduit l'équivalent de f' en 0. Pour celui de f en 0, on voit que $\int_0^1 (f'(t) + \ln(t)) dt$ converge et on observe...

17. a) On utilise l'inégalité des accroissements finis pour g entre 0 et x quand $x \in [0, 1]$ pour montrer la convergence normale sur $[0, 1]$. En fait h est Lipschitzienne...

b) On somme $\sum_{k=0}^n g(x/2^k)$ de deux façons différentes et on observe...

18. On est amené à calculer l'intégrale de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n \ln^n(x)}{n!} dt$. Attention il y a un problème potentiel en 0.

19. a) Cours = $\mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{D}_\zeta =]1, +\infty[$.

b) On observe que si $t > 0$,

$$\frac{1}{e^t - 1} = e^{-t} \cdot \frac{1}{1 - e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$$

Ensuite on fera le changement de variables $u = (n+1)t$...