

Feuille d'exercices numéro 10

Suites et séries de fonctions

I Suites

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme sur les intervalles donnés des suites de fonctions suivantes (on indiquera des sous intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme).
 - a) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \frac{1 + x^n}{1 + x^{2n}}$.
 - b) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{x}}$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$.
 - c) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \frac{x}{x + n}$.
 - d) Sur $\mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \frac{xn}{1 + nx}$.
2. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par $f_n(x) = \frac{e^{-n^2(1+x^2)}}{1 + x^2}$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (f_n) .
3. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par $f_n(x) = \exp\left(-\frac{1 + x^2}{n^2}\right)$.
 - a) Étudier la convergence simple de (f_n) .
 - b) Soit $a > 0$, montrer qu'il y a convergence uniforme de (f_n) sur $[-a, a]$.
 - c) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

4. On considère la suite de fonctions (f_n) définie sur $[0, 1]$ par
- $$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}.$$
- a) Étudier la convergence simple de cette suite sur $[0, 1]$.
- b) Calculer, pour tout n , $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$. Déterminer la limite éventuelle de (I_n) ; que peut-on en conclure ?
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$g_n(x) = \begin{cases} -(n+1)^3 x^2 + (n+1)^2 x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n+1}], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Donner la représentation graphique de g_n .
- b) Calculer $\int_0^1 g_n(t) dt$.
- c) Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (g_n) .

II Séries

6. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{1}{\text{sh}(nx)}$.
- a) Déterminer le domaine de définition de f et étudier la continuité de f .
- b) Étudier les variations de f . Déterminer $\lim_{0^+} f$ et $\lim_{+\infty} f$.
7. On considère la série $\sum f_n$ où pour tout entier $n \geq 2$, tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln(n)}$.
- a) Montrez qu'il y a convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.

- b) Montrez qu'il y a convergence normale sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, mais pas sur $\mathbb{R}_+$.
- c) Montrez que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- d) Prouvez que S n'est pas dérivable à droite en 0.
- e) Montrez que pour tout entier naturel k , $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k S(x) = 0$. On pourra commencer par encadrer $S(x)$ à l'aide d'une somme géométrique.
8. (Centrale, Mines 2005) Soit $f(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-x\sqrt{n}}$
- a) Donner le domaine de définition et la monotonie de f .
(Variante : montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner son sens de variations)
- b) (limite HP !) Donner la limite de f en $+\infty$.
- c) (limite HP !) Donner un équivalent de f en $+\infty$.
- d) Donner un équivalent de f en 0.
- e) Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

9. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n)!}$. Déterminez $\mathcal{D}_f$, montrez que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$. Calculez $f(x)$.
10. (Navale 2002) Soit (a_n) une suite réelle décroissante et positive. On pose $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.
- a) Étudier la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0, 1]$.
- b) Montrez que la convergence normale sur $[0, 1]$ équivaut à la convergence de $\sum a_n/n$.
11. (TPE 2002) soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n^2} \right)$.

- a) Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f ?
 b) f est-elle continue sur $\mathcal{D}$?
 c) f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?
 d) Donner un équivalent de $f(x)$
 i) quand $x \rightarrow 0$
 ii) quand $x \rightarrow +\infty$.
12. (Mines 2003) On pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+n^2}$.
 a) Pour quelles valeurs de t , l'application f est-elle définie ?
 On notera E cet ensemble.
 b) f est-elle continue sur E ?
 c) f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$? De classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$?
13. (CCP 2004) Étudier la convergence simple et la convergence normale de la série $\sum u_n$ avec $u_n(x) = e^{-nx} \ln(1+x^n)$. La série est-elle dérivable terme à terme ?
14. (CCP 2004) Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
15. (CCP 2005) Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n + e^{nx})}{n^3}$.
 a) Donner le domaine $\mathcal{D}$ de définition de f . Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}$.
 b) f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$?
16. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.
 a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
 b) Donner un équivalent simple de $f'(x)$, puis de $f(x)$, au voisinage de 0^+ .

17. Soit $g \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C})$ telle que $g(0) = 0$.

a) Montrer qu'on définit une fonction h continue sur $[0, 1]$, en

posant $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g\left(\frac{x}{2^n}\right)$. *Indication : on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis pour g entre 0 et un réel $a \in [0, 1]$.*

b) Trouver toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, continues en 0 et telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) = f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right).$$

18. Montrer que : $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$. On utilisera la for-

mule $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

19. Soient $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

a) Déterminer les domaines de définition de Γ et ζ .

b) Montrer que :

$$\forall x > 1, \quad \Gamma(x)\zeta(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dx.$$