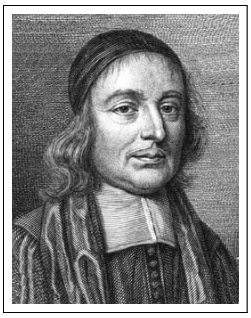
TD intégrales de Wallis
Corrigé

John Wallis 1616–1703



John Wallis, né le 23 novembre 1616 à Ashford, et mort le 28 octobre 1703 à Oxford, est un mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie.

En mathématiques ses travaux concernent principalement le calcul différentiel et intégral où il introduit les intégrales qui porteront son nom. On lui doit également le symbole de l'infini (∞) que l'on utilise de nos jours, ainsi que l'infinitésimal $1/\infty$ dont il s'est servi dans des calculs d'aire.

Il assista l'astronome Jeremiah Horrocks pour ses calculs d'éphémérides, notamment lors du transit de Vénus de 1639. Il résolut le problème de la voûte quarrable (1692), posé par Vincenzo Viviani : trouver une fenêtre dans une voûte hémisphérique de sorte que le reste de la voûte soit quarrable, c'est-à-dire dont l'aire puisse s'écrire c^2, où c est un nombre constructible à la règle et au compas.

Il est également connu comme précurseur de l'éducation des sourds-muets. Ses travaux ont influencé l'abbé Charles-Michel de L'Épée, qui a adapté à la langue française sa méthode de démutisation des sourds-muets.

I Wallis etc.

Partie A

1. La fonction $f_n : x \longmapsto \dfrac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue (par morceaux) et positive sur $[0,1[$. On a :

$$f_n(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}(1-x)^{1/2}}$$

Comme l'exemple de Riemann $t \longmapsto \dfrac{1}{(1-x)^{1/2}}$ est intégrable sur $[0,1[$, par linéarité puis par comparaison par équivalent, f_n est intégrable sur $[0,1[$ et donc w_n existe.

2. Un calcul *très* rapide donne :

$$\begin{aligned} w_0 &= [\arcsin(x)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}, \\ w_1 &= \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. a) La fonction f_n est intégrable, continue, positive et non identiquement nulle sur l'intervalle $[0,1[$ son intégrale est donc strictement positive[1].

   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1-x^2}} \leq 0$$

   donc, en utilisant la croissance de l'intégrale :

$$w_{n+1} - w_n \leq 0$$

   c) La suite $\left(w_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante positive. Elle est donc convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \geq 0$.

4. Relativement **classique !** Comme le demande l'énoncé :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

   On a alors[2] :

$$\begin{aligned} w_n &= \int_0^1 (-x^{n-1}) \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-x^{n-1}\cdot\sqrt{1-x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n-1)x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^1 x^{n-2}\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= (n-1)\int_0^1 \left(\frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= (n-1)(w_{n-2} - w_n) \end{aligned}$$

   On en déduit donc que si $n \geq 2$:

$$nw_n = (n-1)w_{n-2}.$$

[1] Si elle était nulle alors, par positivité et continuité, f_n le serait aussi...

[2] L'intégration par parties est silencieuse : on espère que le lecteur remplira les blancs...

5. Comme la suite (w_n) décroît, pour tout $n \geq 2$:

$$w_{n-2} \geq w_{n-1} \geq w_n > 0$$

En divisant par $w_n > 0$ et en utilisant la formule trouvée à la question précédente on obtient le résultat demandé.
En faisant tendre $n \longrightarrow +\infty$, on remarque que le quotient w_{n-1}/w_n tend vers 1. Ce qui nous permet d'écrire :

$$w_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} w_{n-1}$$

6. **Re-classique !**
a) On a, pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} z_n &= n w_n w_{n-1} \\ &= (n-1) w_{n-2} w_{n-1} \\ &= z_{n-1}. \end{aligned}$$

Comme $z_1 = w_1 w_0 = \pi/2$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = n w_n w_{n-1} = \frac{\pi}{2}.$$

b) En utilisant la relation entre w_{n-1} et w_n, on a :

$$z_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} n w_n^2.$$

Donc,

$$w_n^2 \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$$

En d'autres termes :

$$w_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Partie B

1. a) On a, pour tout $k \geq 1$, $w_{2k} = \dfrac{2k-1}{2k} w_{2(k-1)}$, donc, par une récurrence rapide[3] on arrive au résultat demandé.
b) En se souvenant de l'écriture à l'aide de factorielles du produit de nombres impairs successifs, on obtient :

$$w_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

[3] Dire : Si $w_{2n} = ...$ alors $w_{2(n+1)} = \dfrac{2(n+1)-1}{2(n+1)} \cdot w_{2n} = ...$

2. Calculons :

$$\begin{aligned}
w_{2n} &\underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{\lambda\cdot(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}(\lambda\cdot n^n e^{-n}\sqrt{n})^2}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&\underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{\lambda\cdot n}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&\underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{\pi}{\lambda\cdot\sqrt{2n}}
\end{aligned}$$

En comparant avec la formule (trouvée à la fin de la partie A) :

$$w_{2n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

On déduit que :

$$\lambda = \sqrt{2\pi}$$

En d'autres termes :

$$n! \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

II Les exercices donnés en cours

Partie A Énoncés

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction Γ définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-x}\,\mathrm{d}t$$

2. Soit $p>0$. Démontrer la convergence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(\omega t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$.

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. Montrer que la suite $\big(U_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, puis donner une relation entre U_n et U_{n-2} lorsque $n\geq 2$.

Partie B Solutions

1. La fonction $f : t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue (par morceaux) et positive sur[4] $]0,+\infty[$. Puisque f est positive, on a : f est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, si, et seulement si $x\in\mathcal{D}_\Gamma$.
Examinons les deux problèmes :

[4] On exclut 0 car si $x<1$, la puissance de t est strictement négative.

En 0^+ On a :

$$f(t) \underset{0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

Or l'exemple de Riemann (en 0^+, de paramètre $1/2 < 1$), $t \longmapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable si, et seulement si $1 - x < 1$ c'est-à-dire $x > 0$.

Donc, par comparaison par $\sim$, f est intégrable sur $]0, 1]$ si, et seulement si $x > 0$.

En $+\infty$ Les croissances comparées permettent d'écrire :

$$t^2 f(t) \xrightarrow[t \longrightarrow +\infty]{} 0$$

En d'autres termes $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ Comme $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (exemple de Riemann en $+\infty$ de paramètre $2 > 1$), par comparaison par o, la fonction f est intégrable sur $[1, +\infty[$

Pour conclure f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si $x >$. C'est à dire :

$$\mathcal{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*.$$

2. On remarque que :
   a) La nature de l'intégrale.

$$\sin(\omega t)e^{-pt} = \Im m\left(e^{-pt+i\omega t}\right)$$

puis :

$$\left|e^{-pt+i\omega t}\right| = e^{-pt}$$

Comme $p > 0$, $t \longmapsto e^{-pt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Il en est donc de même pour $t \longmapsto e^{-pt+i\omega t}$, puis pour $t \longmapsto \cos(\omega t)e^{-pt}$ et $t \longmapsto \sin(\omega t)e^{-pt}$.

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ sont donc toutes deux (absolument) convergentes.

Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ on a deux façons

b) L'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\cdot(-p)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\omega} - \frac{p}{\omega}\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
J &= \int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t)e^{-pt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\cdot(-p)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{p}{\omega}I
\end{aligned}$$

Donc I est telle que $I = \dfrac{1}{\omega} - \dfrac{p^2}{\omega^2}I$ et donc $I = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

c) Directement :

$$\begin{aligned}
I &= \Im m\left(\int_0^{+\infty} e^{-pt+i\omega t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \Im m\left(\frac{1}{p-i\omega}\right) \\
&= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

3. Tout d'abord, la fonction $f_n : x \longmapsto x^n e^{-x^2}$ est continue (par morceaux) et positive sur $[0,+\infty[$ donc U_n existe si, et seulement si f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
les croissances comparées permettent d'écrire :

$$x^2 \cdot x^n e^{-x^2} \xrightarrow[x \longrightarrow +\infty]{} 0$$

C'est-à-dire $f_n(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x^2}$. Comme l'exemple de Riemann $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable[5] sur $[1,+\infty[$, donc par comparaison par o, f_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ et donc sur $[0,+\infty[$.
On se souvient que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$$

[5] Savoir le dire proprement !

Et on intègre par parties. Pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} U_n &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{-2} \cdot (-2xe^{-x^2}) \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{n-1}}{-2} \cdot e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{-2} \cdot e^{-x^2} \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + \frac{n-1}{2} U_{n-2} \end{aligned}$$