

lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum mi, placerat nunc adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu ante, tellus pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis semper, est. Vestibulum purus odio, euismod lacinia, velit.

Arbres et Graphes

I Les règles des chemins

1 SOS

On tire un lettre au hasard de chacune des urnes de la figure 1. On forme alors un mot à l'aide des lettres en respectant l'ordre du tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir le mot SOS ?



FIGURE 1 – SOS : les trois urnes

Intuitivement on voit bien qu'on a une probabilité de $1/4$ de tirer le premier S, de $1/3$ le O puis de $2/5$ le second S. On résume ceci à l'aide d'un graphe. C'est la figure 2.

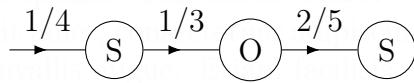


FIGURE 2 – SOS : le graphe de probabilités

Toujours aussi intuitivement, on calcule la probabilité cherchée en écrivant :

$$\mathbb{P}(\text{SOS}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{30}.$$

Formalisons ce que nous venons de faire :

Théorème 1 (première règle des chemins)

La probabilité de suivre un chemin sur un graphe est le produit des probabilités de toutes les flèches qui composent ce chemin.

2 Une broméliacée

Dans une urne, on dispose les lettres du mot ananas (voir figure 3). On tire ensuite deux lettres successivement et sans remise de cette urne. Quelle est la probabilité que la deuxième lettre tirée soit un « a » ?

lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum mi, placerat nunc adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu ante, tellus pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis semper, est. Vestibulum purus odio, euismod lacinia, velit.

Ipsum dolor sit amet, consecetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum in placet et ad miscet vita, felis. Curabitur dictum erat, malesuada fames ac turpis semper, euismod nisi, vulputate et, magna. Donec vehicula augue et neque, euismod id, vulputate et, magna. Donec vehicula augue et neque, euismod id, vulputate et, magna. Donec vehicula augue et neque, euismod id, vulputate et, magna.

I Les règles des chemins

2

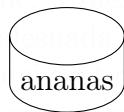


FIGURE 3 – Ananas : l’urne

Dessinons un graphe correspondant à l’expérience ne montrant que les chemins qui se terminent en la lettre cherchée. La probabilité cherchée, $\mathbb{P}(A_2)$ est la probabilité de chaque chemin qui finit en a . On a donc :

Itemus mutatis

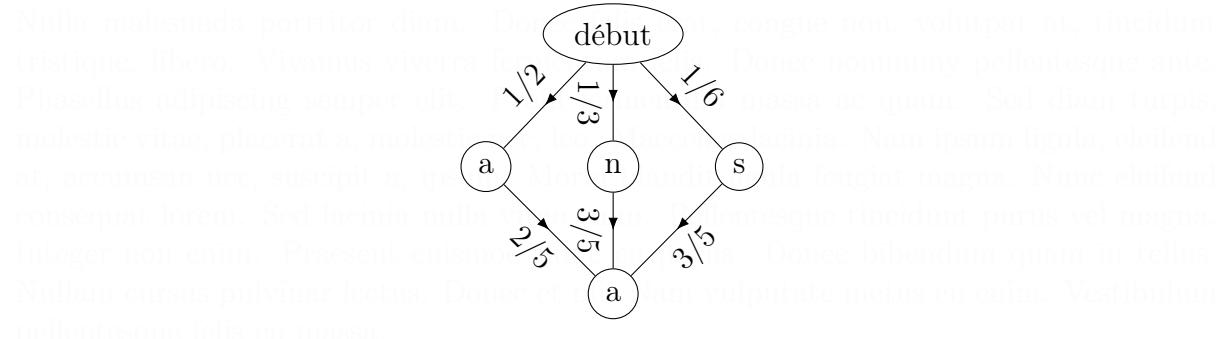


FIGURE 4 – Ananas : le graphe

Formalisons ce que nous venons de faire :

Théorème 2 (seconde règle des chemins)

La probabilité d’aller d’un point A à un autre point B sur un graphe est la somme des probabilités de chacun des chemins reliant A à B .

Redessinons ce graphe en remarquant que on ne s’intéresse pas vraiment aux lettres n et s : elles influent de la même façon sur le second tirage. Le graphe est donné par la figure 5.

Le calcul donne encore $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$.

Sed committio posuisse puto. Vnde in isto est. Ut quis omnis sedetur odio, non videntur hendiadys semper. Dns non odio. Morbi ut dñs. Sed accusant rictus exst odio. In hac habitatione platea detinet. Pellethesque non est. Passe sed nato ex una porta triduum. Matriens rictus odio, sollicitus nam sed, voluppar et, oritur ne erat. Morbi quis dñs. Donec pellethesque erat, et, saecula semper, nato, cuius laboris pars, quis concreta pars, mens tristries tellus. Prost et quam. Class aptent tacet sociosq; ad literas torquent per combitis nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, elefend faleibus, vulnera em, lacus.

Ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum mi placerat ac adipiscere vitas felis. Curabitur dictum eravida mavis. Nam arcu libero, congue et, consectetur id, adipiscere a, magna. Donec vehicula ipsum, ultricies ante. Pellentesque habitant morbi tristisque senectus et netus et malesuada fames ac turpis est. Nunc tunc leo. Cras viverra mavis rhoncus sem. Nulla et, lo.

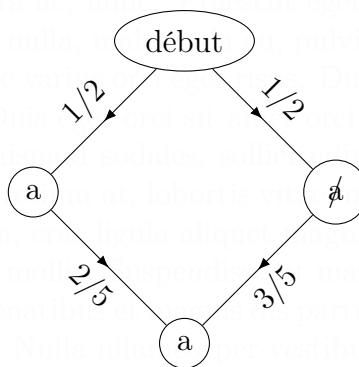


FIGURE 5 – Ananas : l'autre graphe

II Exemples

1 Météo hivernale

a L'énoncé

L'hiver en Bordurie¹ est simple : on a deux choix sec ou humide. On sait que :

- Si aujourd'hui il fait sec (S) alors demain il le temps sera sec avec une probabilité $5/6$.
- Par contre si aujourd'hui il fait humide (H) alors la probabilité qu'il fasse humide demain est $2/3$.
- il est bien sur toujours possible que le temps ne change pas...

Aujourd'hui dimanche fait sec.

1. Quelle est la probabilité qu'il fasse sec mardi ? Mercredi ? Jeudi ?
2. J'étais en vacances longtemps et j'arrive de nuit. Quelle est la probabilité qu'à mon réveil il fasse sec ?

b Résolution

On peut résumer la situation à l'aide du graphe de la figure 6.

Pour la probabilité $\mathbb{P}(S_{\text{mardi}})$ qu'il fasse sec mardi, on lit le graphe de la figure 7 pour obtenir :

$$\mathbb{P}(S_{\text{mardi}}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

¹Voir : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Bordurie>

II Exemples

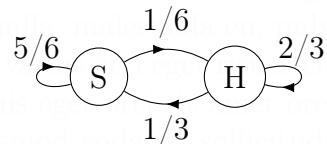


FIGURE 6 – Météo : le graphe

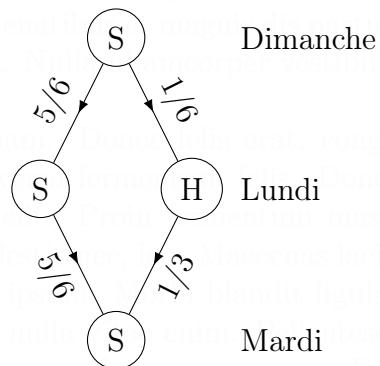


FIGURE 7 – Météo : trois jours

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{\text{mercredi}}) &= \frac{7}{24} \\ \mathbb{P}(S_{\text{jeudi}}) &= \frac{11}{16}\end{aligned}$$

Pour la météo d'un jour inconnu on peut relire le graphe de la figure 6 et déduire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S) &= \frac{5}{6} \times \mathbb{P}(S) + \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(H) \\ &= \frac{5}{6} \times \mathbb{P}(S) + \frac{1}{3} \times (1 - \mathbb{P}(S)) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(S) + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

et donc :

$$\mathbb{P}(S) = \frac{2}{3}$$