Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Euclide -325 – -265

Né[1] vers -325, mort vers -265 à Alexandrie. Euclide est un mathématicien de la Grèce antique ayant probablement vécu en Afrique. Il est l'auteur des Éléments, qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes.
Nous ne savons que très peu de choses relatives à la vie d'Euclide, sinon qu'il était grec qu'il était peut-être né à Athènes (ou en Afrique) vers -325. Il partit en Égypte pour y enseigner les mathématiques sous le règne de Ptolémée Ier. Il mourut vers -265. Il travailla au musée et à l'école de mathématiques d'Alexandrie. Entouré de ses disciples, il y mena de nombreux travaux de recherche. Il est contemporain d'Archimède.
La géométrie telle qu'elle est définie par Euclide dans les Éléments fut considérée pendant des siècles comme *la* géométrie et il fut difficile de lui ôter cette suprématie ; Nicolaï Ivanovitch Lobatchevsky fut le premier à s'y essayer officiellement dès 1826, suivi de János Bolyai, mais la légende veut qu'il n'ait pas été pris au sérieux jusqu'à la mort de Gauss, lorsque l'on découvrit parmi les brouillons de ce dernier qu'il avait lui aussi imaginé des géométries non euclidiennes.
Dans ses livres, Euclide utilise sans la démontrer une propriété des droites, le « postulat d'Euclide », que l'on exprime de nos jours en affirmant que par un point pris hors d'une droite il passe une et une seule parallèle à cette droite.
Il y a essentiellement trois sortes de géométries :

- celle qui admet le postulat d'Euclide et que l'on appelle géométrie plane ou géométrie euclidienne ;
- celle qui admet le postulat qui dit que par un point pris hors d'une droite il ne passe au plus[2] une parallèle à cette droite et que l'on appelle géométrie sphérique ou géométrie riemannienne ;
- celle qui admet le postulat qui dit que par un point pris hors d'une droite il passe au moins[3] une parallèle à cette droite et que l'on appelle géométrie de Lobatchevsky.

Riemann a montré qu'un modèle de la géométrie sphérique est la géométrie de la sphère où les droites sont les méridiens ou grands cercles. Poincaré a donné un modèle de la

[1] Merci à Wikipedia et à MacTutor (http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/) pour la photo et la biographie.
[2] En général aucune.
[3] En général une infinité.

géométrie de Lobatchevsky. Étant donné que ces trois géométries ont des modèles[4], il n'y aucune raison de privilégier l'une plutôt que l'autre. La théorie de la relativité d'Einstein est une grande consommatrice de géométrie non euclidienne. En effet un de ses postulats principaux est que l'espace-temps[5] est courbe[6] et qu'une particule seulement soumise à l'action[7] de la gravité parcourt une géodésique[8] :

> la matière indique à l'espace-temps comment se courber et l'espace-temps indique à la matière comment se déplacer[9].

Euclide s'est aussi intéressé à l'arithmétique dans le livre 7. Il a ainsi défini la division que l'on appelle division euclidienne et un algorithme pour calculer le plus grand commun diviseur de deux nombres, connu sous le nom d'algorithme d'Euclide.

Table des matières

Les savoir-faire

- Savoir ce que sont les endomorphismes symétriques et orthogonaux.
- Savoir reconnaître une matrice orthogonale et donc savoir calculer rapidement son inverse.
- Savoir diagonaliser un endomorphisme ou une matrice symétrique.
- Savoir reconnaître les situations décrites dans la série d'exemples 5.
- Savoir indiquer les éléments géométriques d'un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^2$.

[4] C'est à dire qu'on a des exemples *concrets* qui rendent ces géométries réalistes.
[5] L'ensemble des positions et des instants.
[6] De la même manière que la surface d'une sphère est courbe...
[7] En fait Einstein postule que la gravité est une conséquence de la courbure de l'espace et que, comme pour les effets de Coriolis, la gravité n'est qu'une « pseudo-force ».
[8] Une courbe qui relie deux points par le plus court chemin. Par exemple sur une sphère les géodésiques sont les arcs de grand cercle. Dans le plan ce sont les... droites.
[9] « Matter tells Spacetime how to curve, and Spacetime tells matter how to move » John Wheeler. Wheeler est l'auteur avec ses anciens élèves Charles Misner et Kip Thorne (prix Nobel de physique en 2017 pour ses découvertes sur les ondes gravitationnelles) de la bible des relativistes : « Gravitation » ; qu'on appelle souvent en leur honneur « *le* MTW ».

Remarque préliminaire

Dans tout ce cours $\big(\mathrm{E}, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$ désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. De plus les espaces $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (les colonnes) et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ (les lignes) sont munis de leur produits scalaires usuels (c'est-à-dire canoniques). On identifiera souvant $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

I Isométries vectorielles, matrices orthogonales

1 Isométries vectorielles

Théorème 1

Si $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) f conserve le produit scalaire. C'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle f(x) \mid f(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle .$$

(2) f conserve la norme euclidienne. C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \|f(x)\| = \|x\| .$$

(3) f transforme une base orthonormée (particulière) en une base orthonormée.

(4) f transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.

Définition 1

Un endomorphisme f de E vérifiant une des propriétés données au théorème 1 est une *isométrie vectorielle*. On dit aussi que f est *un endomorphisme orthogonal*.
On note $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Exemples 1

1. Si $\dim(\mathrm{E}) = 1$ alors $\mathcal{O}(\mathrm{E}) = \{-\mathrm{Id}_\mathrm{E}, \mathrm{Id}_\mathrm{E}\}$.
2. $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. u défini par $Q = u(P)$ ssi $Q(X) = P(1-X)$ est orthogonal.
3. $\mathrm{E} = \mathbb{R}^n$, produit scalaire usuel. σ est une permutation de $[\![1, n]\!]$. f_σ défini par :

$$f_\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

est orthogonal.

Corollaire 2

Toute symétrie orthogonale de E est une isométrie vectorielle.

Définition 2

Une *réflexion* de E est une symétrie orthogonale autour d'un hyperplan de E.

EXEMPLE 2 Si $\mathrm{F} = \operatorname{vect}\{u\}^{\perp}$, avec $u \neq \vec{0}$, déterminer la réflexion r autour de F ainsi que la symétrie orthogonale σ autour de F et $\mathrm{F}^{\perp}$.

Propriété 3

Si a et b sont deux vecteurs distincts, non nuls de E et tels que $\|a\| = \|b\|$ alors il existe une unique réflexion échangeant a et b.

Propriété 4

Toute isométrie vectorielle de E est un automorphisme.
L'ensemble $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ des isométrie vectorielle est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{GL}(\mathrm{E}), \circ)$ des automorphismes de E. On le nomme *groupe orthogonal de* E.

Propriété 5

1. Les seules valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle sont -1 et 1.
2. Si F est un sous-espace de E stable par f alors $\mathrm{F}^{\perp}$ est aussi stable par f.

2 Matrices orthogonales

Définition 3

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

REMARQUE Comme toujours, la définition est peu utile. Il va falloir utiliser une caractérisation.

Propriété 6 (caractérisation des matrices orthogonales)

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) M est une matrice orthogonale.

(2) Les colonnes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(3) Les lignes de M forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

(4) M est inversible et $M^{-1} = M^{\mathsf{T}}$.

Remarques

1. Le point (2) montre donc que qu'une matrice orthogonale est une matrice de passage d'une base orthonormée vers une autre.
2. On peut donc caractériser une matrice orthogonale par : M est orthogonale si et seulement si elle est la matrice d'une isométrie relativement à une base orthonormée.

Propriété 7

1. Toute matrice orthogonale est inversible.
2. L'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, noté $\mathcal{O}(n)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. On l'appelle *groupe orthogonal*.
3. L'application de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{O}(n)$ qui à f associe sa matrice dans la base canonique est un isomorphisme de groupe.

Propriété 8

Si M est orthogonale alors $\det(M) = \pm 1$.

Propriété 9

L'ensemble des matrices de $\mathcal{O}(n)$ de déterminant égal à 1 est un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$. On l'appelle *groupe spécial orthogonal* et on le note $\mathcal{SO}(n)$.

II Endomorphismes symétriques

Définition 4

Un endomorphisme φ de E est *symétrique* (pour le produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$) si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \langle \varphi(x) \mid y \rangle = \langle x \mid \varphi(y) \rangle .$$

On dit aussi que φ est *auto-adjoint*.

Exemples 3

1. Projecteurs orthogonaux. CNS : projecteur orthogonal ssi symétrique.

2. Symétries orthogonales. CNS : symétrie orthogonale ssi symétrique.
3. Cas particulier du précédent : $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B)$, $\varphi(A) = A^{\mathsf{T}}$.
4. $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$, $\varphi(P) = 2XP' + (X^2-1)P''$.

Propriété 10

L'ensemble des endomorphismes symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Théorème 11 (caractérisation des endomorphismes symétriques)

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) L'endomorphisme φ est symétrique.

(b) Dans toute base orthonormée de E la matrice de φ est symétrique.

(c) il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de φ est symétrique.

Corollaire 12

Soit φ un endomorphisme de E et A sa matrice dans une base orthonormée de E. Alors :

(1) φ est un projecteur orthogonal si et seulement si $A^2 = A$ et $A^{\mathsf{T}} = A$.

(2) φ est une symétrie orthogonale si et seulement si $A^2 = I_n$ et $A^{\mathsf{T}} = A$.

III Réduction des endomorphismes symétriques

1 Le théorème

Théorème 13 (théorème spectral des endomorphismes symétriques)

Soit φ un endomorphisme symétrique de E alors :

(1) φ est diagonalisable.

(2) E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres pour φ.

(3) Il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour φ.

Corollaire 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique **réelle**. Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que :

$$A = PDP^\mathsf{T}.$$

Exemple 4 Diagonaliser $A = (1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Applications

Par l'exemple.

Exemples 5

1. Soit A symétrique réelle. Détermination du sup et de l'inf de $f(X) = \dfrac{X^\mathsf{T} AX}{X^\mathsf{T} X}$ quand X parcourt l'ensemble des colonnes non nulles.
2. Matrices symétriques positives : A est symétrique à valeurs propres positives ssi on peut l'écrire $A = B^\mathsf{T} B$. Quels sont les liens entre les différentes matrices B trouvées ?
3. Matrices symétriques positives (bis) : si A est symétrique à valeurs propres positives alors il existe une unique matrice symétrique réelle C telle que $A = C^2$.

IV Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$

Propriété 15 (les groupes $\mathcal{O}(2)$ et $\mathcal{SO}(2)$)

On a :

$$\mathcal{O}(2) = \left\{ M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1 \right\}$$
$$\mathcal{SO}(2) = \left\{ M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Propriété 16

Le groupe $\mathcal{SO}(2)$ est commutatif et l'application :

$$\theta \longmapsto R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

est un morphisme surjectif du groupe additif $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{SO}(2)$. On a notamment

$$R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta').$$

Définition 5 (rotation plane)

Les éléments de $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ sont appelés les *rotations vectorielles planes*.

Théorème 17 (caractérisation des rotations planes)

Soit r une rotation vectorielle plane. il existe un réel θ, unique à un multiple entier de 2π près tel que, quelle que soit la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta).$$

Le réel θ est *une mesure de l'angle* de la rotation r. Cette rotation est alors *la rotation d'angle θ*.

Propriété 18

La rotation r est la rotation d'angle θ si et seulement si pour tout vecteur unitaire a :

$$\cos\theta = \langle a \mid r(a)\rangle \ \text{ et } \ \sin\theta = \det(a, r(a))$$

où det est le déterminant relativement à une base orthonormée directe quelconque.

Propriété 19

Les isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas dans $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ sont des réflexions.