Équations différentielles

Jacques Charles François Sturm 1803–1855

Jacques Charles François Sturm[1], né à Genève le 29 septembre 1803 et mort à Paris le 15 décembre 1855, est un mathématicien français.
Après avoir été précepteur du fils de Madame de Staël, il décide avec son ami Jean-Daniel Colladon de venir à Paris. En 1827, ils remportent un prix de l'Académie des sciences pour des recherches sur la compressibilité des liquides et procèdent à une mesure directe de la vitesse du son dans l'eau. Dès lors, leurs recherches divergent. En 1829, Sturm démontre le théorème qu'on nommera en son honneur, permettant de calculer le nombre de racines réelles distinctes d'un polynôme comprises dans un intervalle.
Il est élu membre de l'Académie des sciences en 1836. Il est répétiteur puis professeur à l'École polytechnique et succède à Siméon Denis Poisson à la chaire de mécanique à la faculté des sciences. En 1840, il est élu membre de la Royal Society, qui lui décerne la médaille Copley la même année. Ses *Cours d'analyse de l'école polytechnique* (1857-1863) et ses *Cours de mécanique de l'école polytechnique* (1861) ont été publiés après sa mort.
Il est avec Joseph Liouville l'auteur de la théorie Sturm-Liouville. Cette théorie est celle de l'étude systématique des équations du type :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+q(x)y=-\lambda w(x)y$$

Où le paramètre λ fait partie des inconnues. Souvent on résout en fait le problème composé de l'équation précédente et de conditions initiales portant sur y et y' en a et b. Les solutions λ, y de ce problème apparaissant souvent comme un couple valeur propre, vecteur propre d'un opérateur[2] de l'espace $\mathcal{C}^\infty([a,b],\mathbb{C})$: celui qui à u associe $\mathcal{L}(u)=\frac{1}{w}\left(\left(pu'\right)'-qu\right)$...

Table des matières

[1]Merci wikipedia pour les informations.
[2]Un endomorphisme.

Les savoir-faire

- Savoir résoudre des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre et du second ordre à coefficients constants et second membre « polynôme exponentielle ».
- Savoir résoudre un système différentiel à coefficients constants.
- Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre.
- Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre, quand on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée.
- Savoir recoller des solutions.
- Construire un système fondamental de solutions d'une équation homogène linéaire du second ordre à partir d'une solution non nulle.
- Effectuer un changement de variables ou d'inconnue dans une équation différentielle.
- Rechercher des solutions particulières (polynomiales ou développables en série entière) d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

I Rappel : équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre

1 Généralités

Définition 1

- On appelle *équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre* une équation du type :
$$y' + ay = b \tag{E}$$
où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. La fonction inconnue est $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

- L'*équation homogène* (ou équation sans second membre) associée à l'équation (E) est l'équation :
$$y' + ay = 0 \tag{E_0}$$
- Une fonction f est solution de (E) sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et vérifie :
$$\forall x \in I, \quad f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$
On a une définition similaire pour « f est solution de (E_0) ».

Définition 2

une *courbe intégrale* de l'équation (E) est le graphe d'une solution de cette équation différentielle.

Remarque On dit souvent « *intégrer* l'équation différentielle... » à la place de « résoudre... » : la méthode donnée par le théorème 1 consiste à calculer une primitive, donc une intégrale.

2 La résolution

Théorème 1 (résolution de l'équation homogène)

Soit a une fonction continue sur l'intervalle I. Les solutions sur I de l'équation homogène :
$$y' + ay = 0 \tag{E_0}$$
forment une droite vectorielle engendrée par la fonction ψ définie sur I par $\psi(x) = \exp(-A(x))$ où A est une primitive sur I de la fonction a. En d'autres termes l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions à (E_0) s'écrit
$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{vect}\left\{\exp(-A)\right\}.$$

Formes particulières

Les cas particuliers suivants évitent de chercher explicitement les primitives de $-a$.

forme de $-a$	valeur de $-A$	solution de (E_0)
u'/u	$\ln\lvert u\rvert$	u
$\alpha u'/u$	$\alpha\ln\lvert u\rvert$	$\lvert u\rvert^\alpha$
$u'/u + v'/v$	$\ln\lvert u\rvert + \ln\lvert v\rvert$	uv

Les valeurs absolues qui apparaissent dans la seconde colonne, peuvent disparaître dans la troisième : les fonctions u, v *etc* ne s'annulent pas sur I (sinon on ne peut pas diviser) et sont donc de signe constant.

Théorème 2 (résolution de l'équation (E))

Sot a, b deux fonctions continues sur l'intervalle I. Les solutions sur I de l'équation :

$$y' + ay = b \tag{E}$$

s'écrivent $y = y^* + y_0$ où y^* est une solution de l'équation (E) et y_0 est une solution de l'équation homogène associée à (E). En d'autres termes l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions à (E) s'écrit

$$\mathcal{S} = \{y^* + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_0\}\,.$$

Remarque Pour trouver une solution de (E) un peut

1. Remarquer une solution évidente (voir l'exemple 1.1)
2. « Faire varier la constante ».
3. Superposer des solutions (voir l'exemple 1.2).

Exemples 1

1. $xy' + y = 3x^2$. Rechercher les solutions définies (et continues) sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. $xy' + y = 3x^2 + 8$.
3. $xy' - 2y = x$. Rechercher l'ensemble des solutions définies (et continues) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Définition 3 (problème de Cauchy)

Soient $x_0 \in I$ et $\alpha_0 \in \mathbb{K}$. Le système

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = \alpha_0 \quad (\star) \end{cases}$$

est appelé *problème de Cauchy* en (x_0, α_0). L'équation $(\star)$ est appelée *condition initiale* (ou condition de Cauchy).

Théorème 3 (résolution de d'un problème de Cauchy)

Soient a, b et c trois fonctions continues sur l'intervalle I et $(x_0, \alpha_0) \in I \times \mathbb{K}$. On suppose que a ne s'annule pas sur I.
Il existe une unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(x_0) = \alpha_0 \end{cases}$$

II Systèmes différentiels

1 Généralités

Définition 4

Soient I un intervalle et $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- On appelle *système différentiel* une équation du type :
$$X' = AX + B \tag{Σ}$$
où A et B sont des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs respectives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La fonction inconnue est $X : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et est supposée être dérivable.

- L'*équation homogène* (ou équation sans second membre) associée à l'équation (Σ) est l'équation :
$$X' = AX \tag{Σ_0}$$

- Une fonction U est solution de (Σ) sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et vérifie :
$$\forall t \in I, \quad U'(t) = A(t)U(t) + B(t).$$
On a une définition similaire pour « U est solution de (Σ_0) ».

2 Résolution

Théorème 4 (de Cauchy)

Soient A, B deux fonctions **continues** sur l'intervalle I et à valeurs respectives dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $(t_0, U_0) \in I \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors il existe une unique fonction U définie et dérivable sur sur I, à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et telle que :

$$U(t_0) = U_0, \quad \forall t \in I,\ U'(t) = A(t)U(t) + B(t).$$

C'est **la** solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = U_0 \end{cases}$$

3 Ensembles de solutions

Propriété 5

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur l'intervalle I du système différentiel $X' = AX$ est un espace vectoriel de dimension n.

Propriété 6

Soit U^* une solution de (Σ). Les solutions de (Σ) s'écrivent sous la forme $U = U^* + U_0$ où U_0 est une solution de l'équation homogène associée à (Σ). En d'autre termes, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (Σ) s'écrit :

$$\mathcal{S} = \{U^* + U_0 \mid U_0 \in \mathcal{S}_0\}.$$

III Systèmes différentiels à coefficients constants

1 Généralités

Remarque Ici on cherche à résoudre $X' = AX + B$ dans les cas où A et B sont deux matrices constantes.

Propriété 7

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, I un intervalle et U une solution sur I du système $X' = AX$. Notons J l'intervalle $\{t + a \mid t \in I\}$. La fonction V définie pour tout $s \in J$ par $V(s) = U(s - a)$ est une solution sur J de $X' = AX$.

Remarque Cette propriété est caractéristique des *systèmes autonomes*. Seule importe l'évolution pas l'origine des temps.

Théorème 8

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On considère le problème de Cauchy suivant :

$$(\mathcal{C}) \quad \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

1. Le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. Si I est un intervalle contenant t_0, le problème de Cauchy $(\mathcal{C})$ a une unique solution sur I qui est la restriction à I de la solution sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 9

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions sur I de $X' = AX$ est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$.

Propriété 10

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, E l'espace vectoriel **complexe** des solutions à valeurs complexes du système différentiel $X' = AX$ et F l'espace vectoriel **réel** des solutions à valeurs réelles du même système différentiel.
Alors $V \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ est un élément de F si et seulement si il existe $U \in$ E tel que $V = \Re e(U)$.

2 Méthodes de résolution

Il y a deux cas : A est diagonalisable ou A est trigonalisable (ce qui est toujours possible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Cas où A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Dans ce cas, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. Si on pose $Y = P^{-1}X$ alors Y est solution de $Y' = DY$. C'est-à-dire que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad y_i' = \lambda_i y_i$$

et, on a donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \ \forall t \in I, \quad y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}.$$

Avec $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des constantes (dans $\mathbb{K}$). On a donc obtenu Y, puis X via la relation $X = PY$.

Exemple 2 Résolution de $X' = AX$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cas où A est trigonalisable

Plus difficile... Il faut résoudre en « cascade ». Sur l'exemple suivant on voit la technique :

Exemple 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

IV Équations différentielles linéaires scalaires du second ordre

1 Généralités

Définition 5

- On appelle *équation différentielle scalaire linéaire du second ordre* une équation du type :
$$y'' + ay' + by = c \tag{E}$$
où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$. La fonction inconnue est $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

- L'*équation homogène* (ou équation sans second membre) associée à l'équation (E) est l'équation :
$$y'' + ay + by = 0 \tag{E$_0$}$$

- Une fonction f est solution de (E) sur I si et seulement si elle est dérivable sur I et vérifie :
$$\forall x \in I, \quad f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x).$$
On a une définition similaire pour « f est solution de (E$_0$) ».

Remarque On peut associer à l'équation (E) le système différentiel $X' = AX + B$ où :
$$X = \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$$
En effet $X' = AX + B$ s'écrit :
$$\begin{cases} y' = p \\ p' = -by - ap + c \end{cases}$$
Ce qui donne bien : $y'' = -ay' - by + c$. L'inconnue p étant une inconnue auxiliaire permettant de passer de l'ordre 2 à l'ordre 1. En fait, on passe de l'espace des positions à l'espace des phases[3].

[3]En mécanique les points de l'espace des phases sont les couples (x, p) où x est la position et p la quantité de mouvement du point matériel considéré. La trajectoire d'un point matériel est régie par une équation du second ordre dans l'espace des positions ou par une équation du premier ordre dans l'espace des phases.

Théorème 11 (résolution d'un problème de Cauchy (bis))

Pour tout $(x_0, \alpha_0, \beta_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \beta_0 \end{cases}$$

a une unique solution sur I.

Avec les notations de la remarque précédente, on est amené à résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = AX + B \\ X(t_0) = U_0 \end{cases} \text{où } U_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

Corollaire 12

L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$ de l'équation homogène

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$. De plus, pour $x_0 \in I$ fixé, l'application qui à une solution f de (E_0) associe le couple $(f(x_0), f'(x_0))$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 6

On appelle *système fondamental de solutions de l'équation homogène* (E_0) toute base (f_1, f_2) de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$.

2 Petit problème : l'étude du wronskien

Définition 7 (wronskien ; HP)

Soient u et v deux solutions sur I de l'équation homogène (E_0). Le wronskien de u et v est la fonction $W_{u,v}$ définie sur I par :

$$W_{u,v}(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$$

On fixe ici deux solutions u et v de (E_0).

1. Montrer que le wronskien W de (u, v) vérifie : $W' + aW = 0$.
2. En déduire que s'il existe $x_0 \in I$ tel que $W(x_0) = 0$ alors W est la fonction nulle sur I.

3. Soit $x_0 \in I$. Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{S}_0$ par $\varphi(u) = \big(u(x_0), u'(x_0)\big)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathbb{K}^2$.
4. Démontrer la propriété suivante :

Propriété 13 (HP)

Supposons que a ne s'annule pas sur I et que u, v sont deux solutions de (E_0). Les propositions sont équivalentes :

(a) il existe $x_0 \in I$ tel que $W_{u,v}(x_0) \neq 0$;

(b) pour tout $x \in I$, $W_{u,v}(x) \neq 0$;

(c) (u, v) est un système fondamental de solutions de (E_0).

3 Résolution de l'équation avec second membre

Dans toute cette section on on cherche à résoudre l'équation

$$y'' + ay + by = c \tag{E}$$

Variation d'une constante

Ici, on ne dispose que d'une solution de l'équation homogène.
Soit donc φ une solution de l'équation homogène

$$y'' + ay + by = 0 \tag{E_0}$$

qui, de plus, ne s'annule pas sur I. Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction $u = f/\varphi$ est, elle aussi, de classe $\mathcal{C}^2$. Le but de la méthode est de trouver une équation différentielle que doit vérifier u pour que f soit solution de

$$y'' + ay + by = d \tag{E}$$

La fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction u vérifie :

$$(u''\varphi + 2u'\varphi' + u\varphi'') + a(u'\varphi + u\varphi') + bu\varphi = c$$

ou encore

$$\varphi u'' + (2\varphi' + a\varphi)u' + (\varphi'' + a\varphi' + b\varphi)u = c.$$

Or φ est solution de (E_0), donc l'équation précédente donne :

$$\varphi u'' + (2\varphi' + a\varphi)u' = c.$$

La fonction u' est donc solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\varphi y' + (2\varphi' + a\varphi)y = c.$$

On résout donc cette équation pour trouver $u' = y$ (une constante d'intégration), puis on calcule une primitive pour trouver u (une seconde constante d'intégration)...

EXEMPLE 4 Résolution de $ty'' - 2y' + (2-t)y = (t-1)e^{-t}$. La fonction φ définie par $\varphi(t) = e^t$ est solution de l'équation différentielle homogène associée.

Et pour l'équation homogène ?

À la louche : on suit les indications de l'énoncé et, si celui-ci est muet on part du principe qu'il y a (au moins) une solution « évidente » (voir l'exemple 4).

EXEMPLES 5

1. $4t(t+1)y'' + 2y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Chercher les solutions de la forme $t \longmapsto t^\alpha$. Et sur $]-1,0[$ et $]-\infty,0[$?
2. $(1-t^2)y'' - ty' + 4y = 0$ sur $]-1,1[$. Chercher des solutions polynomiales.
3. $4ty'' + 2y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Chercher des solutions développables en série entière (sur $\mathbb{R}$...).
4. La même équation, mais sur $\mathbb{R}_-^*$. On fait le changement de fonction inconnue $z(u) = y(t)$ avec $u = \sqrt{-t}$