Réduction

Marie Ennemond Camille Jordan[1] 1838–1922

Mathématicien français[2], connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent cours d'analyse. Aujourd'hui on associe son nom à un certain nombre de résultats fondamentaux :

- le théorème de Jordan et la courbe de Jordan à laquelle ce théorème se réfère[3] ;
- la forme normale de Jordan et la réduction de Jordan (parfois confondue avec les travaux de Wilhelm Jordan 1842–1899 à qui l'on doit la méthode du pivot ou d'élimination de Gauss-Jordan) ;
- le théorème de Jordan-Hölder, qui est un résultat fondamental sur les groupes finis et les séries de compositions.

Camille Jordan a contribué à faire entrer la théorie de Galois dans le courant de pensée majoritaire. Il étudia aussi les groupes de Mathieu, premiers exemples de groupes sporadiques.

Table des matières

[1] C'est le nom complet. Son prénom d'usage est Camille.
[2] Merci qui ? Ben pas mamie Nova, mais MacTutor et Wikipedia...
[3] Voir l'article de wikipedia correspondant : il contient de très jolis dessins !

Les questions

1 J'ai besoin de réviser quoi ?

Ce cours repose sur les cours suivants :

- algèbre linéaire générale (sup et spé) ;
- déterminants ;
- polynômes.

2 Ça sert à quoi ?

Les notions introduites (vecteurs et valeurs propres, sous-espaces propres, spectre) sont utilisées dans de nombreux domaines des mathématiques, de la physique et de la chimie : systèmes différentiels, mécanique classique et quantique, théorie du signal, etc.
En mécanique, par exemple, dès qu'il y a vibration, il y a *modes propres* (et résonnance). Pour les trouver, on cherche les éléments propres d'un système différentiel associé au problème. La page wikipedia correspondante est peut être un peu technique, mais est riche en informations.

3 Diagonalisation

Qu'est-ce qu'une valeur propre ? Comment trouver ces valeurs ?

Voir les définitions 1 (p. 4) et 2 (p. 4). Pour trouver les valeurs propres on peut :

1. résoudre $AX = \lambda X$;
2. trouver les racines du polynôme caractéristique de A ;
3. utiliser la forme de la matrice (triangulaire par exemple), sa trace, son déterminant et même son rang pour trouver les valeurs propres ;

Que dire des éléments propres de A et de $A + \alpha I_n$?

Ils sont *fortement* liés[4]. Pour être précis, on a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \lambda + \alpha \in \mathrm{Sp}(A + \alpha I_n)$$

et

$$\mathrm{Sep}(A, \lambda) = \mathrm{Sep}(A + \alpha I_n, \lambda + \alpha).$$

[4] Donc si on sait faire pour A, on *doit* savoir faire pour $A + \alpha I_n$!

Que dire d'une matrice qui n'a qu'une seule valeur propre ?

En général elle n'est pas diagonalisable. Voir la propriété 17 page 10.

Quand est-ce-que u est il diagonalisable ?

Voir la définition 7 (p. 10). Les théorèmes 19 et 22 (pp. 10 et 11) fournissent des conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité.
On peut aussi utiliser la condition suffisante fournie par le corollaire 21.

Les savoir-faire

- Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- Diagnostiquer la diagonalisabilité ou la trigonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- Savoir réduire une matrice carrée.
- Appliquer les stratégies de réduction au calcul des puissances n^{es} d'une matrice carrée.
- Savoir exploiter les relation entre un endomorphisme et ses matrices dans différentes bases.
- Savoir, dans les cas simples, trigonaliser une matrice.
- Avoir des idées pour la recherche d'éléments propres en dimension infinie.

I Révisions sur les déterminants

Quelques calculs...

EXEMPLE 1 On cherche à calculer les déterminants suivants :

1. $\det(u_1 + xv, u_2 + xv, \dots, u_n + xv)$ où v, u_1, ..., u_n sont $n+1$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
2. $\det(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1+a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1+a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

   On peut le traiter à l'aide d'une méthode similaire au 1. ou observer la somme des termes de chaque ligne.

3. $\det(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \cdots & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

4. Déterminant de *Vandermonde* : $V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$

II Éléments propres

1 Définitions

Définition 1 (éléments propres)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de u si et seulement si il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.
2. On dit que $x \in \mathrm{E}$ est *vecteur propre* de u *associé à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$ si et seulement si il est **non nul** et vérifie $u(x) = \lambda x$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, le *sous-espace propre* de u *associé à la valeur propre* λ est $\mathrm{Sep}(u, \lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id_E}) = \{x \in \mathrm{E} \mid u(x) = \lambda x\}$.

Remarque Certains auteurs écrivent aussi $\mathrm{E}_\lambda(u)$ pour le sous-espace propre associé à la valeur λ pour u ; il n'y a pas de notation standard[5] pour décrire un sous-espace propre.

Définition 2

Les éléments propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ceux de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Ainsi :

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de A si et seulement si il existe un vecteur **non nul** $x \in \mathbb{K}^n$, de colonne associée $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, telle que $AX = \lambda X$.
2. On dit que $x \in \mathbb{K}^n$, de colonne associée $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est *vecteur propre* de A *associé à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$ si et seulement si il est **non nul** et vérifie

[5] Mis à part l'écriture $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id_E})$.

$AX = \lambda X$.

3. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A, le *sous-espace propre* de A *associé à la valeur propre* λ est l'ensemble des $x \in \mathbb{K}^n$ tels que $AX = \lambda X$, où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la colonne associée à x.

Une colonne **non nulle** $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ verifiant $AX = \lambda X$ est appelée *colonne propre* de A *associée à la valeur propre* $\lambda \in \mathbb{K}$

Remarque Souvent, dans l'en-tête d'un sujet on rencontrera la phrase : « on identifiera $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ». Ceci permet alors d'écrire Ax pour $x \in \mathbb{K}^n$ et d'éviter ainsi la lourdeur de « x de colonne associée X »...

Définition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le *spectre* de $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, note $\mathrm{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u.
De même, on définit le *spectre* d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 2

1. Éléments propres de $\lambda \operatorname{Id}_{\mathrm{E}}$.
2. Éléments propres de la rotation u du plan (réel) d'angle $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.
3. $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, éléments propres de D défini par $D(f) = f'$.
4. $\mathrm{E} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: espace vectoriel des suites à termes complexes. Éléments propres de Δ défini par $\Delta(u) = v$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$ (décalage d'un cran).
5. $\mathrm{E} = \mathbb{C}[X]$, éléments propres de u défini par : $u(P) = XP$.
6. $p \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un projecteur tel que $p \neq 0$ et $p \neq \operatorname{Id}_{\mathrm{E}}$. Éléments propres de p ?
7. $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ et s est la symétrie par rapport à F de direction G. Éléments propres de s ?

Propriété 1

Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent (pour la loi $\circ$) alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

Remarque C'est notamment le cas quand v est un polynôme en u, c'est-à-dire de la forme $a_0 \operatorname{Id}_{\mathrm{E}} + a_1 u + \cdots + a_d u^d$.

Propriété 2

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Alors :

(1) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u alors les sous-espaces propres $\mathrm{Sep}(u, \lambda_1), \ldots, \mathrm{Sep}(u, \lambda_p)$ sont en somme directe.

(2) Toute famille de p vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Exemples 3

1. Même notations (et résultats) que l'exemple 2.3. Si on note $e_\lambda : t \longmapsto e^{\lambda t}$ alors, si les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, la famille de fonctions $(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n})$ est une famille libre. dit autrement, la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre.

2. Même notations (et résultats) que l'exemple 2.4. Par la même méthode que supra, la famille $\left((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ est libre dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

3. $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ défini par $u(f) = g$ si et seulement si $g(t) = tf'(t)$. Par la même méthode qu'avant, on déduit que la famille $(t \longmapsto t^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est libre dans E.

Écriture Si $v = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on écrira $\overline{v} = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n)$.

Propriété 3

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (vue comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $(v_1, \ldots, v_k)$ une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.
Alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A et $(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k)$ une base du sous-espace propre de A associé à la valeur propre $\overline{\lambda}$.

Remarque Se souvenir des règles de calcul matriciel avec le conjugué :

$$\overline{AB} = \overline{A} \times \overline{B}$$
$$\overline{\det(M)} = \det(\overline{M}).$$

2 Polynôme caractéristique

À partir de maintenant les espaces vectoriels sont supposés être de **dimension finie non nulle**.

Propriété 4

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} &(i) && \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \\ &(ii) && \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u \notin \mathcal{GL}(\mathrm{E}), \\ &(iii) && \det(\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - u) = 0. \end{aligned}$$

Polynôme caractéristique d'une matrice

Propriété 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \in \mathbb{K} \longmapsto \det(xI_n - A)$ est une fonction polynomiale de degré exactement n et on a, pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\det(xI_n - A) = x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Comme à toute fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$ on peut associer un unique polynôme, on peut définir :

Définition 4

Le *polynôme caractéristique* χ_A de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'élément de $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_A(x) = \det(xI_n - A).$$

Remarque Certains auteurs et concepteurs de sujets peuvent définir[6] le polynôme caractéristique par :

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_n) = (-1)^n \det(xI_n - A).$$

Il faut donc, faire bien attention à la définition[7] utilisée par l'énoncé.

Exemple 4 Recherche de χ_A où $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Propriété 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire de termes diagonaux $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_A(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k).$$

Remarque Attention : ne marche que si la matrice est triangulaire. En général, il n'y a *pas* de lien entre éléments diagonaux et valeurs propres.

[6] C'est l'ancienne définition. N'oubliez pas : le sujet a toujours raison !

[7] À la louche : si rien n'est dit, c'est celle de la définition 4, sinon faire attention !

Propriété 7

Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines de son polynôme caractéristique.

Propriété 8

(1) Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique et donc même spectre.

(2) Une matrice carrée et sa transposée ont même polynôme caractéristique et donc même spectre.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

En utilisant la première partie de la propriété 8, on peut justifier la définition suivante :

Définition 5

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est égal à celui de sa matrice dans une base quelconque.

Propriété 9

Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ sont les racines de son polynôme caractéristique.

Propriété 10

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ avec $\dim \mathrm{E} = n$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$ on a :

$$\chi_u(x) = x^n - \mathrm{tr}(u)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

Propriétés communes

Propriété 11

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors le polynôme caractéristique de $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est scindé. On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Définition 6

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On appelle *ordre de multiplicité* (ou ordre) de la valeur propre λ de u l'ordre de λ comme racine de χ_u. On a la même définition pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On revient sur une propriété qu'on avait déjà entrevu dans le passé :

Propriété 12

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, avec $\dim(\mathrm{E}) = n$, a au plus n valeurs propres distinctes. On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 13

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ de polynôme caractéristique χ_u **scindé** sur $\mathbb{K}$.
Si $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$ alors :

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \quad \det(u) = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

On a les mêmes relations pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si χ_A est **scindé**.

Remarque Toujours dans le cas où χ_u est scindé. Si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et $m_1, \ldots, m_p$ les ordres respectifs de ces valeurs propres, on a :

$$\mathrm{tr}(u) = \sum_{k=1}^{p} m_k \lambda_k, \quad \det(u) = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{m_k}.$$

Ce qui change ici c'est qu'on suppose les valeurs propres distinctes et on compte leur multiplicité.

Propriété 14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors $\overline{\lambda}$ est valeur propre de A avec le même ordre que λ.

Propriété 15

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0\}$ et stable par u. Si on note u_1 l'endomorphisme de F induit par u alors χ_{u_1} divise χ_u.

Corollaire 16

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. La dimension d'un sous-espace propre de u est au plus égale à l'ordre de la valeur propre correspondante.
On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque Donc si λ est une valeur propre de multiplicité $m \geq 1$, alors on a l'encadrement $1 \leq \dim \mathrm{Sep}(u, \lambda) \leq m$. Le cas $m = 1$ est donc particulièrement simple.

Corollaire 17

La dimension du sous-espace propre pour une valeur propre simple est égal à 1.

III Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe les espaces vectoriels sont supposés de **dimension finie non nulle**.

1 Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Définition 7

1. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dit *diagonalisable* si et seulement si E est la somme directe des sous-espaces propres de u.
2. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *diagonalisable* si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable.

Exemples 5

1. Projecteurs et symétries de E.
2. $D_n : P \in \mathbb{K}_n[X] \longmapsto D_n(P) = P'$.
3. $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto f(A) = A + \mathrm{tr}(A)I_n$.
4. (Variante du précédent) $f : x \in \mathrm{E} \longmapsto f(x) = x + \varphi(x)u$ où φ est une forme linéaire non nulle sur E et u un vecteur tel que $\varphi(u) \neq 0$. Que se passe-t-il si on suppose $\varphi(u) = 0$?

Propriété 18

Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ admet une unique valeur propre λ alors u est diagonalisable si et seulement si $u = \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Théorème 19

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) L'endomorphisme u est diagonalisable.

(ii) il existe des sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_m$ stables par u, sur lesquels u induit des homothéties et tels que $\mathrm{E} = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{F}_k$.

(iii) Il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour u, c'est-à-dire une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

(iv) On a $\sum_{k=1}^{p} \dim \operatorname{Sep}(u, \lambda_k) = \dim \mathrm{E}$ où $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$.

Corollaire 20

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Corollaire 21

Soient E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ possédant n valeurs propres distinctes, c'est-à-dire ayant un polynôme caractéristique scindé à racines simples.
Alors chaque sous-espace propre est de dimension 1 et u est diagonalisable.
On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 22

Pour que $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

(1) Son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

(2) Pour tout valeur propre de u, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre.

On a le même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 6

1. Suite de l'exemple 4.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. CNS sur a, b et c pour que A soit diagonalisable ?

2 Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Définition 8

1. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est dit *trigonalisable* si et seulement si il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
2. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *trigonalisable* si et seulement si l'endomor-

phisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est trigonalisable, c'est-à-dire si et seulement si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 23

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.
On a la même résultat pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

EXEMPLES 7

1. Étude du cas de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$.

2. $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ avec λ (resp. μ) valeur propre simple (resp. double) de A. On suppose A non diagonalisable, c'est-à-dire $\dim \mathrm{Sep}(A, \mu) = 1$.

3. $A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 18 \\ -6 & -7 & -9 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

IV Compléments

1 Puissances de matrices

Si la matrice est diagonalisable, c'est facile !

Propriété 24

(1) Si $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $D^k = \mathrm{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$.

(2) Si $A = PDP^{-1}$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Par contre dans les autres cas, il faut suivre l'énoncé et travailler. On verra à la fin de la section suivante un moyen de se simplifier la vie dans un certain cas.

EXEMPLES 8

1. Étude d'une suite récurrente linéaire vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

2. Étude d'une suite récurrente linéaire vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+3} = -u_{n+2} + u_{n+1} + u_n$.

2 Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Tout ce qui est dans cette section est aux frontières du programme : il faut savoir refaire...

Des calculs classiques

SF Soient u un endomorphisme, λ une valeur propre de celui-ci et x un vecteur propre associé. On sait donc que $u(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$. On voit alors que :

$$u(x) = \lambda x$$
$$u^2(x) = u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda^2 x$$

puis, par récurrence sur k :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(x) = \lambda^k x$$

On aurait la même idée avec une matrice et une colonne propre : si $AX = \alpha X$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \alpha^k X$.

Avec un polynôme

SF Soit P est le polynôme $a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$. On peut construire l'endomorphisme $P(u) = a_0 \operatorname{Id}_{\mathrm{E}} + a_1 u + \cdots + a_d u^d$ (ou la matrice $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d$). On voit alors qu'avec les notations précédentes :

$$P(u)(x) = P(\lambda) \cdot x$$
$$P(A)X = P(\lambda) X$$

Conséquences

Si P est tel que $P(u) = 0$ (on dit alors que P est un polynôme annulateur de u) alors une valeur propre λ de u vérifie :

$$P(\lambda) = 0$$

En d'autres termes : on sait ou chercher les valeurs propres...

Exemples 9

1. Si, par exemple $u^3 - 3u^2 + 2u = 0$ alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{0, 1, 2\}$.
2. Supposons $A^2 + 3A + 2I_n = 0$. En effectuant la division euclidienne de X^p par $X^2 + 3X + 2$, on montre que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_m, b_m tels que :

$$A^m = a_m A + b_m I_n$$