Suites et séries de fonctions

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß 1815–1897

Mathématicien allemand. WEIERSTRASS étudia la fiabilité de l'analyse et le développement de la théorie des fonctions à partir des séries entières.

Il est à l'origine de beaucoup de concepts importants dans l'enseignement actuel des mathématiques. On lui doit notamment des critères de convergence pour les séries, la manipulation des produits infinis, le concept de convergence uniforme, le théorème de Bolzano[1]-Weierstraß qui indique que de toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Alors que d'autres mathématiciens éminents, comme Cauchy, n'avaient que de vagues définitions de la limite et de la continuité d'une fonction. Weierstraß définit la continuité[2] comme suit :

> $f(x)$ est continue en $x = x_0$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| < \delta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Weierstraß formula également une définition de la limite et de la dérivée « en (ε, δ) », telle qu'on l'enseigne aujourd'hui.

Dès 1861, dans ses cours, il présentait l'exemple d'une fonction continue partout et dérivable nulle part obtenue à l'aide de la sommation d'une série trigonométrique. C'est la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \text{ où } 0 < a < 1 \text{ et } ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

La figure 1 montre le graphe de trois sommes partielles de la série de somme f pour $a = 1/2$ et $b = 12$.

[1] Bernard Placidus Johann Nepomuk BOLZANO (1781–1848) était un mathématicien bohémien (il est né et est mort à Prague, capitale de la Bohême) de langue allemande. Considéré comme un des fondateurs de la logique moderne.

[2] Comme nous !

Figure 1 Tracé de $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \cos(12^k \pi x)$

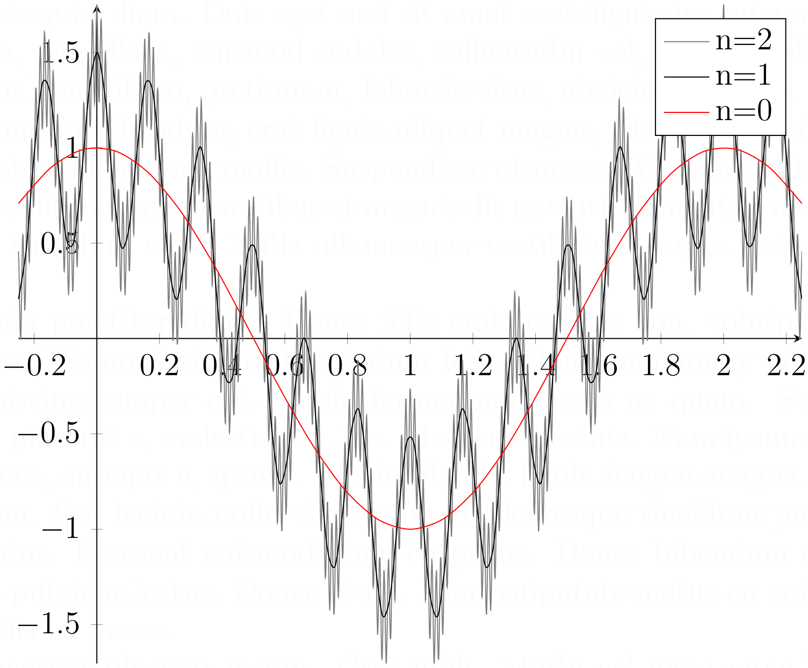

Table des matières

Les questions

1 Convergences

Quels sont les différents modes de convergence pour une suite de fonctions ?

La convergence simple (définition 1) et la convergence uniforme (définition 3).

Quels sont les différents modes de convergence pour une série de fonctions ?

La convergence simple (définition 2) la convergence uniforme (définition 3) et la convergence normale (définition 4)

Pour une série de fonctions, que faire en premier ?

Voir d'abord si la série converge normalement (voir la section suivante), puis étudier la convergence uniforme.

Comment prouver la convergence normale d'une série de fonctions ?

- En priorité, majorer $|u_n(x)|$ par a_n et essayer d'utiliser la propriété 2.
- Ensuite, si on ne voit pas a_n, étudier les variations de la fonction u_n sur l'intervalle I pour trouver $\left\|u_n\right\|_\infty$.

Comment montrer qu'une série converge uniformément

On commence d'abord par essayer de montrer qu'elle converge normalement puis si cela ne fonctionne pas, on essaye de majorer le reste...

2 Interversion de symboles

Comment intervertir limite de suite et de variable ou limite et somme de série ?

À la main ! Voir les exemple 5

Comment dériver terme à terme ?

Utiliser le théorème 6 ou son corollaire (le corollaire 7).

Comment intégrer terme à terme sur un segment ?

On tente le théorème 5. Si on ne peut l'utiliser, il faut passer au théorème d'intégration des fonctions intégrables vu dans un cours passé.

Les savoir-faire

- Distinguer les différents modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.
- Connaître les conditions pour que la limite d'une suite ou la somme d'une série de fonctions soit continue sur un intervalle.

- Connaître les conditions pour qu'on puisse dériver terme à terme la limite d'une suite ou la somme d'une série de fonctions.
- Connaître les conditions pour qu'on puisse intégrer terme à terme la somme d'une série de fonctions sur un segment.

I Définition des convergences

1 Notations $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{\infty,I}$

Dans tout ce cours on notera :

- $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions[3] définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un sous-espace[4] vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Pour $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{K})$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}\left|f(x)\right|.$$

C'est une norme[5] : la *norme uniforme* (ou *norme infinie*). Si d'aventure il nous arrivait de travailler avec plusieurs intervalles, on notera cette norme $\|f\|_{\infty,I}$ afin d'éviter les ambiguïtés.

2 Convergence simple

Définition 1 (Convergence simple d'une suite)

On dit qu'une suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $f_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$, *converge simplement* sur I vers $\varphi \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ si et seulement si :

$$\forall x \in I,\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \varphi(x).$$

Remarque Cette définition a déjà été vue dans le cours sur la convergence dominée et ses applications. Comme son nom l'indique c'est la forme la plus basique de convergence : elle ne fournit que très peu d'information. On le verra : une suite de fonctions continues peut converger simplement et avoir une limite discontinue.

Exemple 1 Étude de la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ où f_n est définie par $f_n(x) = \arctan(nx)$

[3] En fait on considère les *applications* de I dans $\mathbb{K}$ et on devrait noter $\mathcal{F}(I,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^I$.
[4] Exercice à savoir faire !
[5] Attention : on est dans un espace de dimension infinie et donc ce n'est pas couvert par le programme. Mais bon, la notion est la même, les subtilités par contre...

Définition 2 (Convergence simple d'une série)

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ *converge simplement* sur I si et seulement si, pour tout $x \in I$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ converge.
Dans ce cas la *somme* de la série de fonctions est la fonction f définie sur I par $x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. On le note $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

3 Convergence uniforme

Définition 3

(a) La suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément* vers la fonction f sur I si et seulement si :

$$\|f_n - f\|_{\infty,I} \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0.$$

(b) La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite de fonctions $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Remarques
Son inclus dans la définition :

1. pour que (f_n) converge uniformément vers f, il faut déjà que converge simplement vers f ;
2. pour que (f_n) converge uniformément vers f, il faut déjà que $f_n - f$ soit bornée sur I ;
3. pour qu'une série converge uniformément il faut déjà qu'elle converge simplement ;
4. pour qu'une série de fonctions converge uniformément, il faut et il suffit que la suite des restes $\left(R_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, où $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

De plus on a :

1. Si (f_n) converge uniformément vers f sur l'intervalle I et que l'intervalle J est inclus dans I alors (f_n) converge aussi uniformément vers f sur l'intervalle J.
2. On a la même idée pour une série de fonction.

3. Dit autrement : si on peut dire des choses sur un « gros » intervalle alors on peut aussi les dire sur les « petits » sous-intervalles.

EXEMPLES 2
1. La suite (f_n) où $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. $I = \mathbb{R}$.
2. La série de terme général u_n où $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. $I = [a, +\infty[$ $(a > 0)$.

4 Convergence normale

Définition 4

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$, avec $u_n \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, *converge normalement* sur I si et seulement si :

(a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ (c'est-à-dire u_n bornée sur I) ;

(b) la série numérique $\sum_{n\geq 0} \left\|u_n\right\|_\infty$ converge.

Propriété 1

Toute série de fonctions qui converge normalement sur I, converge aussi simplement et uniformément sur I.

Propriété 2 (Critère de Weierstraß)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions, avec $u_n \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$.

(1) On suppose qu'il existe une série **numérique** à termes réels positifs convergente $\sum_{n\geq 0} a_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in I,\ \left|u_n(x)\right| \leq a_n.$$

Alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur I.

(2) S'il existe une suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x_n)$ diverge alors la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas normalement sur I.

5 Normale vs. uniforme

On l'a vu à la propriété 1 que convergence normale implique convergence uniforme. Le plan d'étude est donc, en général :

1. Étudier la convergence normale sur tout I ou sur tout segment de I.
2. Si le point précédent ne marche pas, étudier la convergence uniforme sur I ou ses segments.

Si la série de fonctions qu'on étudie est alternée, on sait majorer le reste et on a pas besoin d'étudier la convergence normale. L'exemple 2.2 est typique.

6 Sur tout segment : localité

Dans la suite du cours on aura souvent besoin de réduire l'intervalle I sur lequel on travaille parce qu'il est difficile, voire impossible de démontrer la convergence uniforme ou normale sur I. De plus la plupart des notions étudiées : continuité, dérivabilité sont *locales*, c'est-à-dire qu'il suffit de se placer dans un petit segment entourant le point étudié.
On va donc étudier la convergence uniforme/normale sur tout segment J inclus dans l'intervalle I.

EXEMPLES 3
Étude de $\sum u_n$ avec :

1. $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$.
2. $u_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$.
3. $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ et $I = \mathbb{R}_+^*$.
4. $u_n(x) = a_n x^n$ et $I =]-R, R[$ où R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

7 Suite du cours

La plupart des théorèmes du cours traitent aussi bien des suites que des séries. Je n'ai souvent écrit que les versions sur les séries[6]. Il faut savoir écrire[7] les versions pour les suites...

[6] Avec convergence uniforme des séries : on a les mêmes conclusions avec la convergence normale, voir le théorème 1.

[7] On s'inspire du passage du théorème 3 au théorème 4

II Limite et continuité

1 Continuité

Théorème 3

Soit $\left(f_n\right)$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément (sur tout segment de) I vers la fonction g
Alors la limite g est continue sur I.

Théorème 4 (Version séries du thèorème 3)

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions continues qui converge uniformément sur (tout segment de) I.
Alors la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ de cette série de fonctions est continue sur I.

Remarque On a la même conclusion en remplaçant *uniformément* par *normalement* dans le théorème 4.

Exemples 4
1. Continuité pour les exemples 2 et 3.
2. La fonction ζ de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
3. Continuité des sommes de série entière.

2 Limite

On n'a pas de théorème simple pour échanger deux symboles limite.

Borne finie

Si pour tout n, la fonction f_n est continue sur I et a une limite ℓ_n au point a (qui est une borne de I), alors en prolongeant f_n par $f_n(a) = \ell_n$, on obtient une fonction continue en a et on peut se ramener au théorèmes 3/4.

Borne infinie

Le cas de $\pm\infty$ est plus complexe : on ne dispose pas de théorème ad hoc. On a deux idées de méthodes :

- Tenter une comparaison série intégrale : on écrit $u_n(x) = g(n,x)$, puis on essaye d'encadrer $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ à l'aide de $F(x) = \int_{\alpha}^{+\infty} g(t,x)\,\mathrm{d}t$ et enfin on observe $F(x)$.
- Ou alors on considère le changement de variable $y = 1/x$ et on voit que $x \longrightarrow +\infty$ équivaut à $y \longrightarrow 0$ et on est ramené au cas de la borne finie...

Exemples 5

1. Limite en $+\infty$ de la fonction ζ définie dans les exemples 4.
2. Limite et équivalent en $+\infty$ de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.

III Intégration et dérivation

1 Intégration terme à terme

Ici, comme dans le passé, $[a,b]$ désigne le segment de bornes a et b. On ne suppose pas forcément $a < b$.

Théorème 5

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions continues uniformément convergente sur le **segment** de bornes a et b. Alors la série $\sum_{n\geq 0}\left(\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge et on a :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exemples 6

1. Pour $\alpha > 0$, on montre que $f : x \longmapsto \dfrac{(1-x)^2}{1-x^\alpha}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ et qu'on peut écrire $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous la forme d'une somme de série numérique.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \{|z|\}$. Calcul de $\int_0^{2\pi} \dfrac{\mathrm{d}\theta}{z - re^{i\theta}}$. On sépare les cas $r < |z|$ et $r > |z|$.

2 Dérivation terme à terme

Rappel Si f est une fonction dérivable, alors Df désigne sa dérivée. En d'autres termes $Df = f'$...

Dérivée première

Théorème 6

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions, avec $u_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. On fait les hypothèses suivants :

(a) chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

(b) la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur I ;

(c) la série $\sum_{n\geq 0} Du_n$ converge uniformément sur (tout segment de) I.

Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} Du_n.$$

Dérivées successives

Corollaire 7

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de fonctions, avec $u_n \in \mathcal{F}(I,\mathbb{K})$. On fait les hypothèses suivantes :

(a) chaque u_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I ;

(b) pour chaque $k \in [\![0, p-1]\!]$, la série $\sum_{n\geq 0} D^k u_n$ converge simplement sur I ;

(c) la série $\sum_{n\geq 0} D^p u_n$ converge uniformément sur (tout segment de) I.

Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est $\mathcal{C}^p$ sur I et :

$$\forall k \in [\![1, p]\!]\,,\ D^k\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D^k u_n.$$

Exemples 7

1. La fonction ζ définie à l'exemple 5.1 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Les sommes de séries entières de rayon de convergence R sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.
3. Étude sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\sum u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

4. Étude sur $\mathbb{R}_+^*$ de $\sum u_n$ avec $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.